Microeconomia

Produção

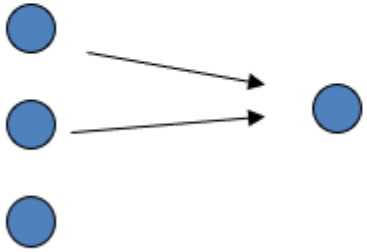
Prof. Fabio Barbieri

Teoria Neoclássica da Firma

- Problema alocativo:
  - como alocar recursos produtivos escassos à produção de diferentes bens?
    - Existem diversas formas de produzir um bem
    - Cada recurso pode ser empregue em diversos processos produtivos diferentes
  - Restrições:
    - Técnica: relação entre insumos e produtos
    - Econômica: custos de oportunidade dos recursos
    - Institucional: estrutura de mercado

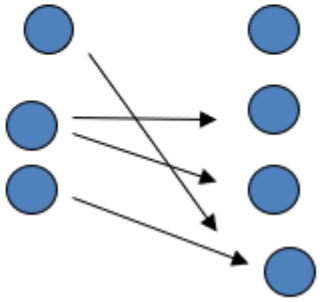
Problema Técnico

Meios Fins



Problema Econômico

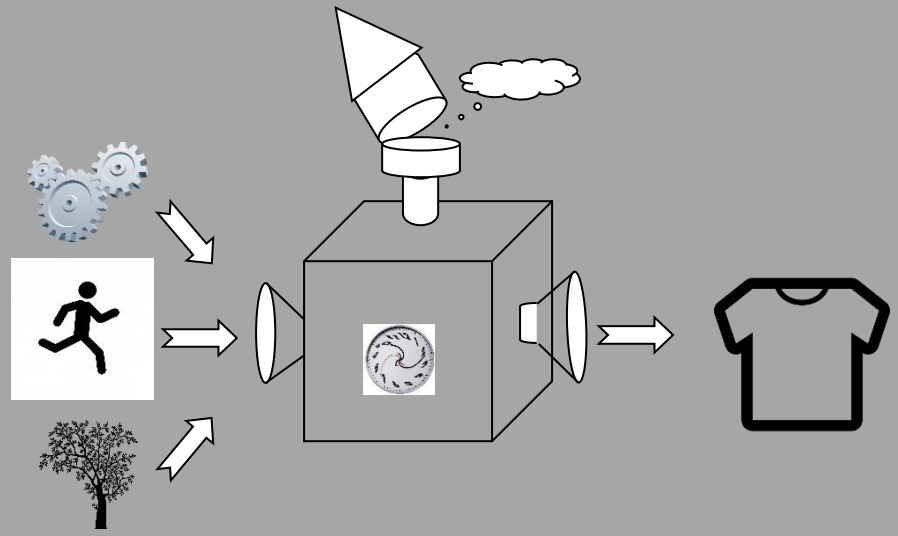
Meios Fins



Teoria Neoclássica da Firma

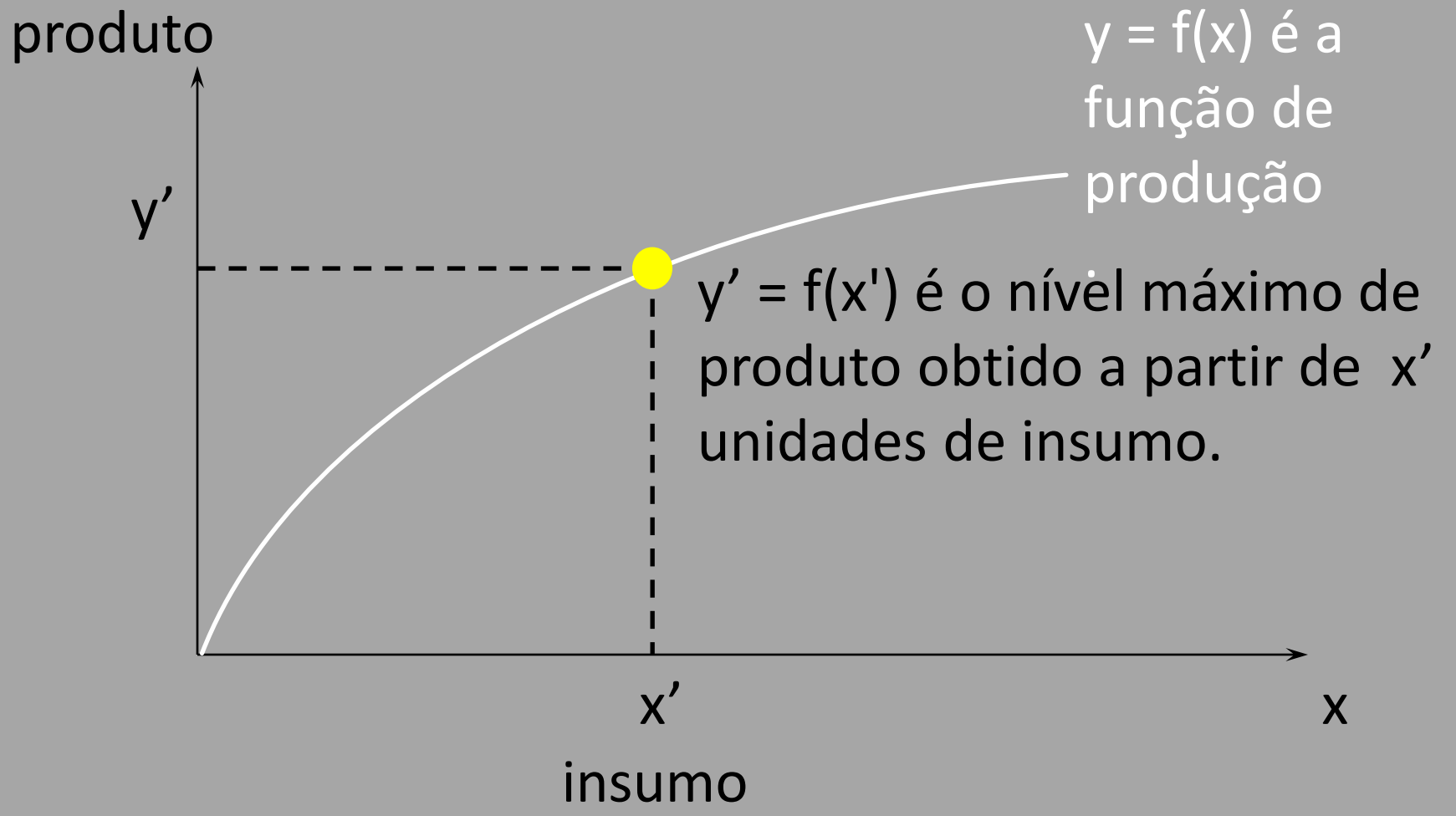
- Problema alocativo:
  - como alocar recursos produtivos escassos à produção de diferentes bens?
  - Firma como relação entre insumos e produtos
- Função de produção:
  - representa a quantidade **máxima** de um bem produzida a partir de cada combinação possível de insumos.

$$Y(x_1, x_2, ..., x_n)$$

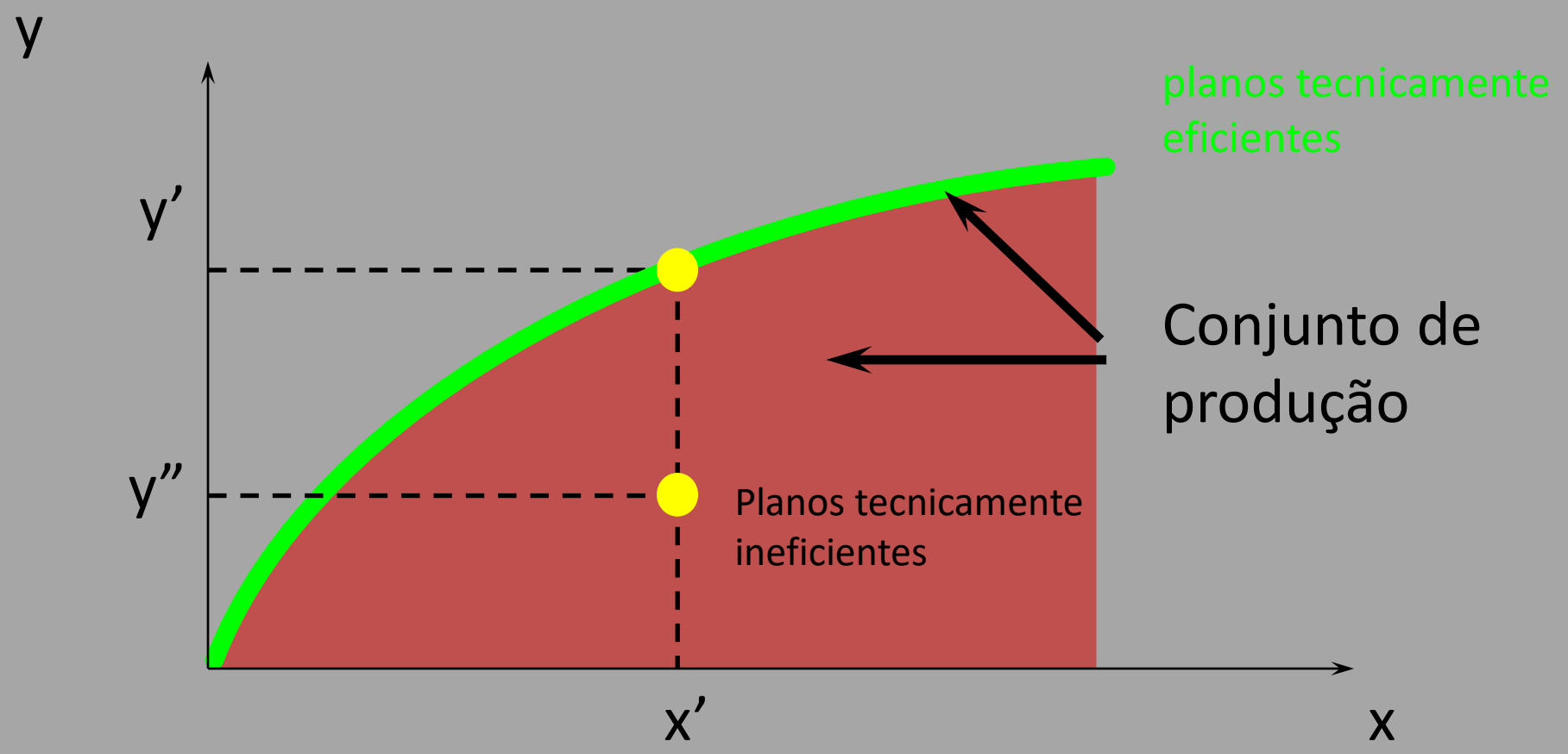


Funções de Produção

Exemplo: um insumo, um produto



Conjuntos de produção



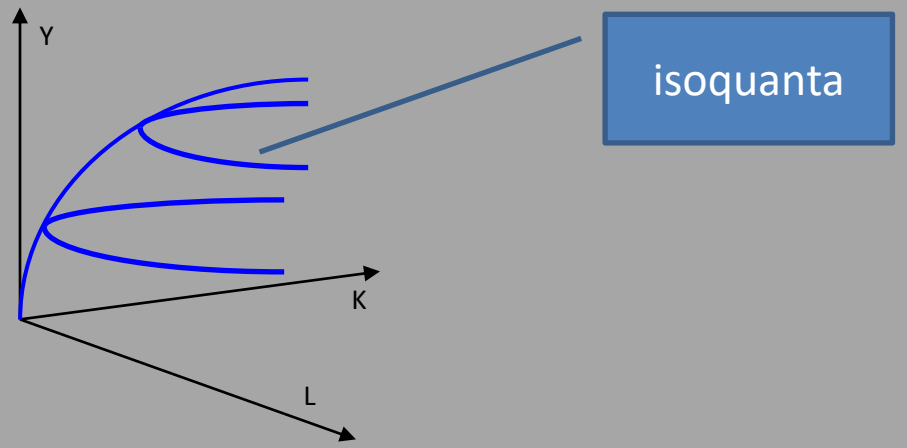
Função de Produção

- Função que representa a quantidade máxima de um bem produzida a partir de cada combinação possível de insumos.

$$Y(x_1, x_2, ..., x_n)$$

- Vamos tomar o caso em que a quantidade Y de um único produto seja função do emprego de dois insumos, capital K e trabalho L.
- A **função de produção** com dois insumos pode então ser expressa como:

$$Y = f(K,L)$$



Tecnologias com Múltiplos Insumos

Como é uma tecnologia quando há mais de um insumo?

Dois insumos: Os níveis de insumos são x1 e x2. O nível de produto é y.

Suponha que a função de produção seja

$$y = f(x_1, x_2) = 2x_1^{1/3}x_2^{1/3}.$$

Tecnologias com Múltiplos Insumos

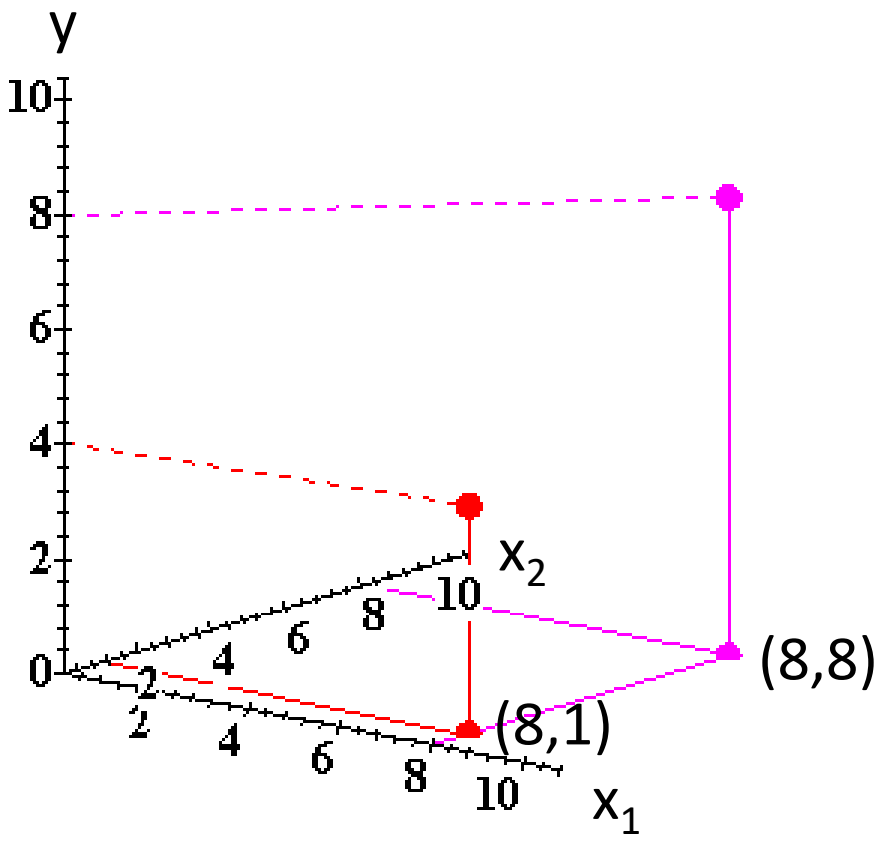
- *Por exemplo, o nível de produto máximo possível a partir do plano de produção (x1, x2) = (1, 8) é*

$$y = 2x_1^{1/3}x_2^{1/3} = 2 \times 1^{1/3} \times 8^{1/3} = 2 \times 1 \times 2 = 4.$$

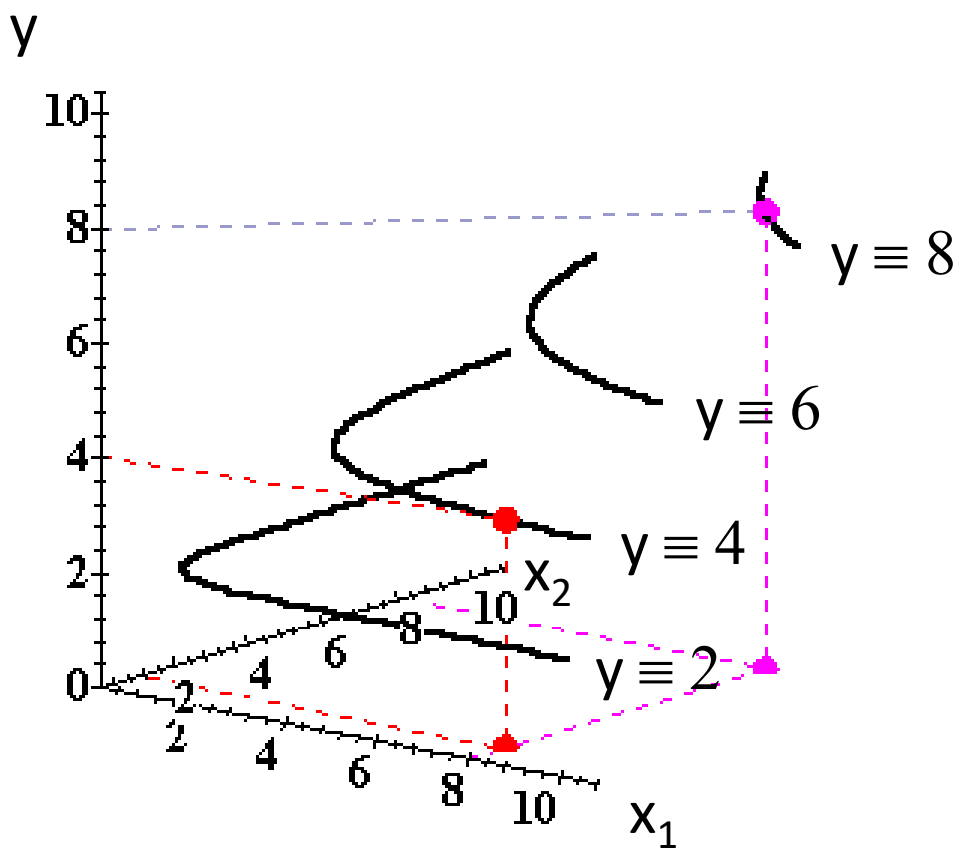
E o nível máximo de produção a partir de (x_1,x_2) = (8,8) é

$$y = 2x_1^{1/3}x_2^{1/3} = 2 \times 8^{1/3} \times 8^{1/3} = 2 \times 2 \times 2 = 8.$$

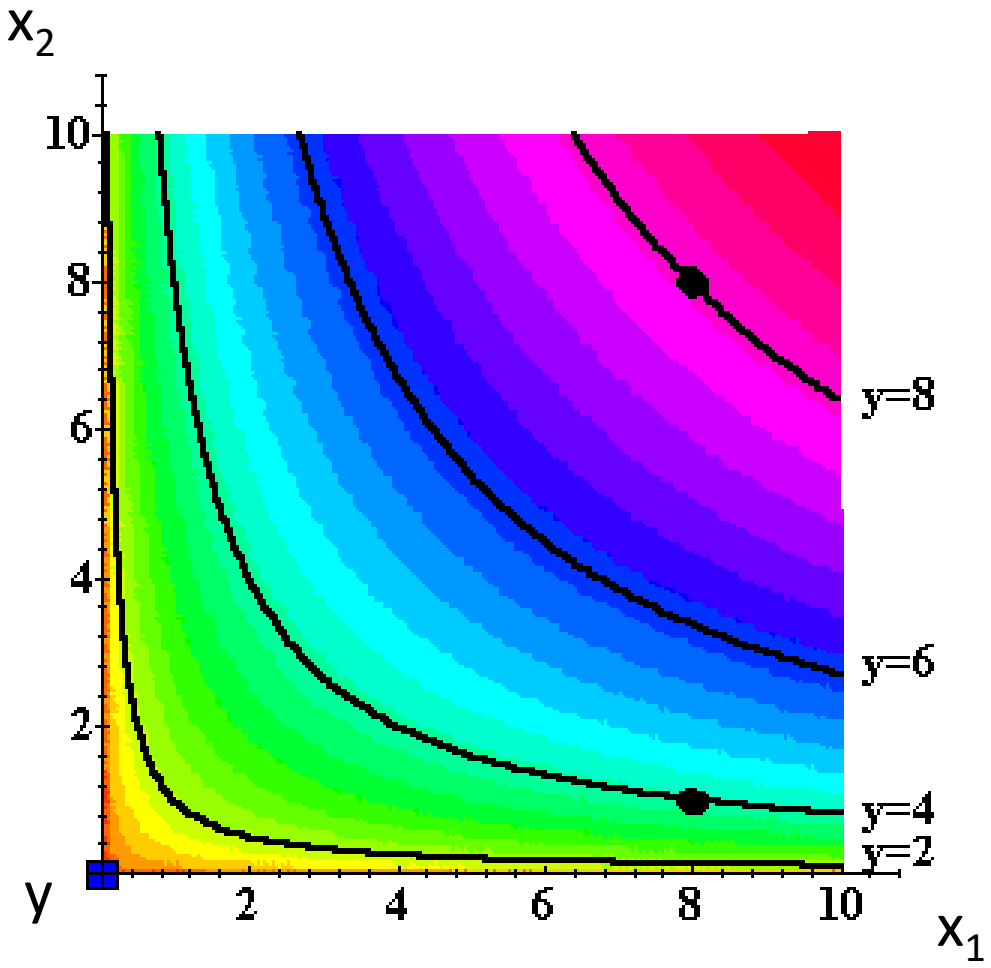
Tecnologias com Múltiplos Insumos



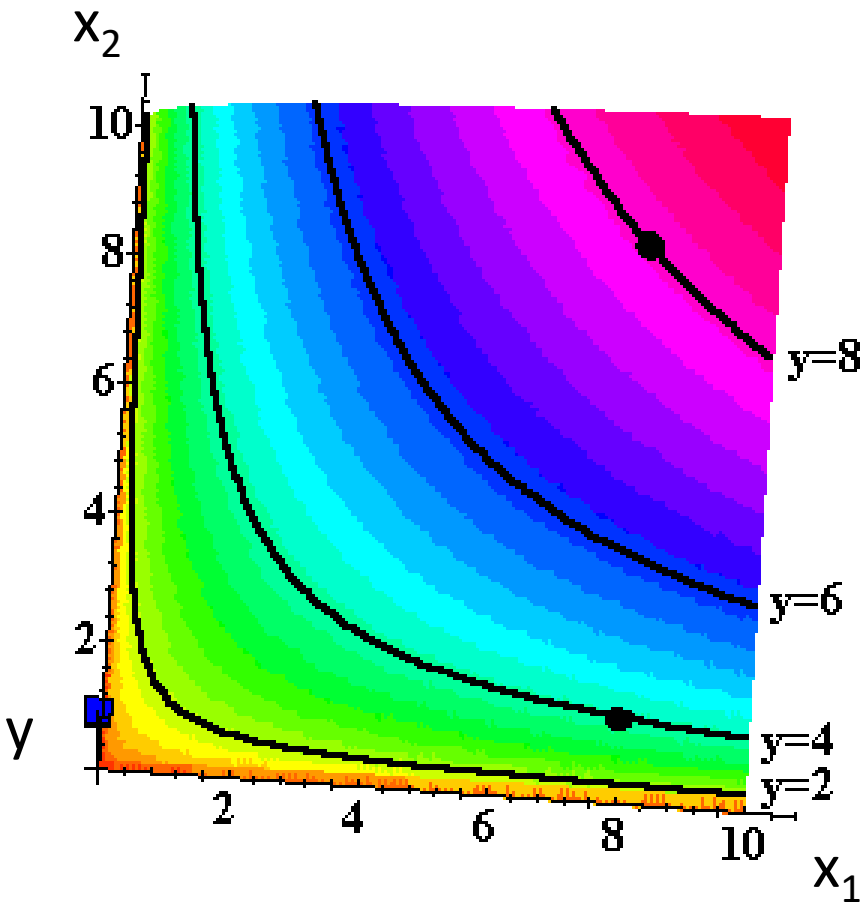
Mapa de isoquantas



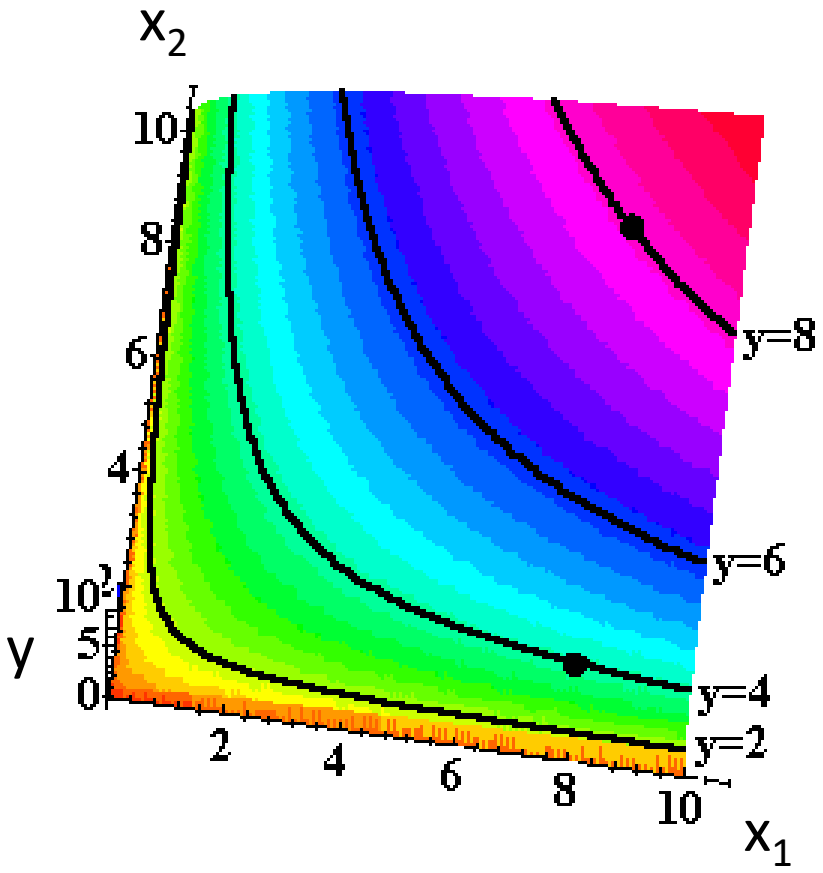
Isoquantas



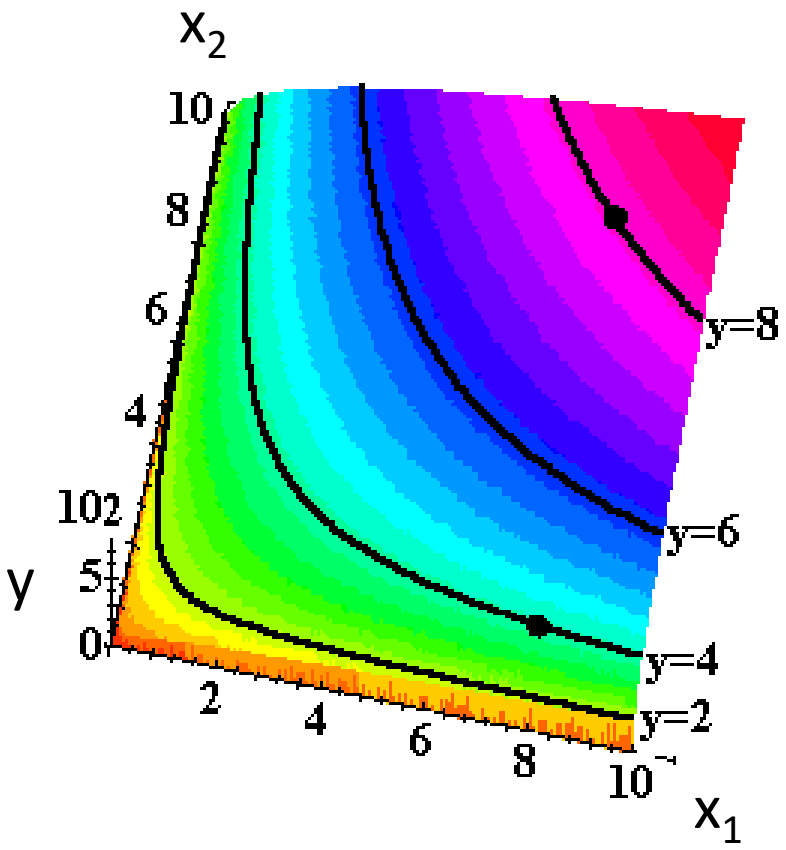
Isoquantas



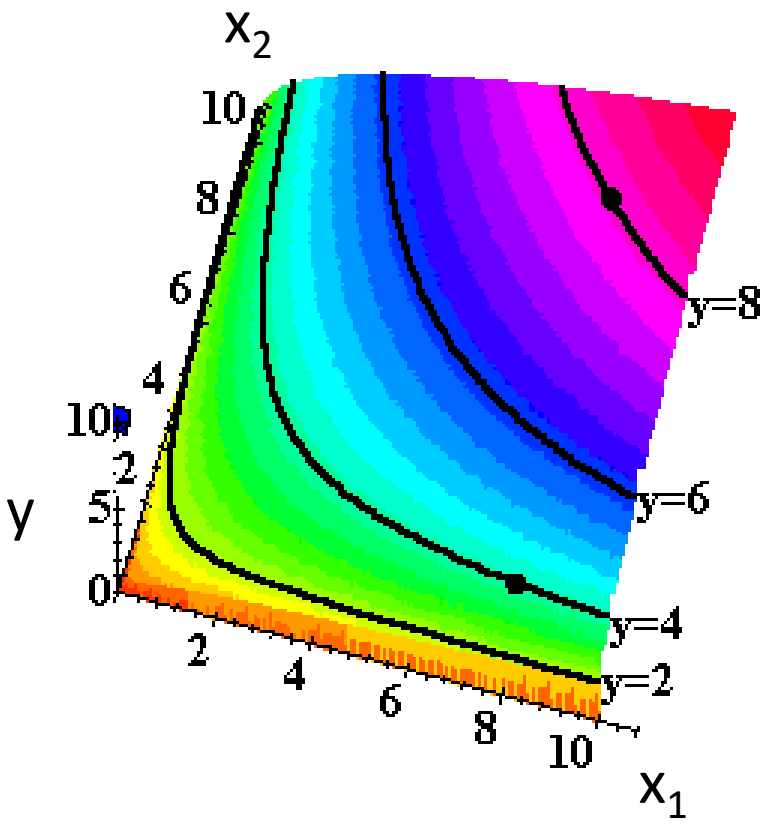
Isoquantas



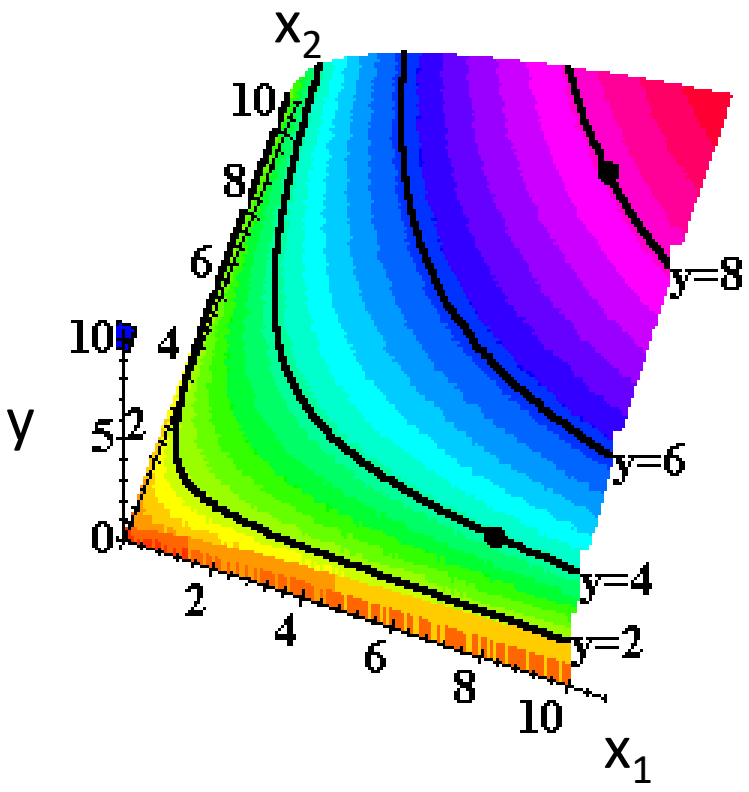
Isoquantas



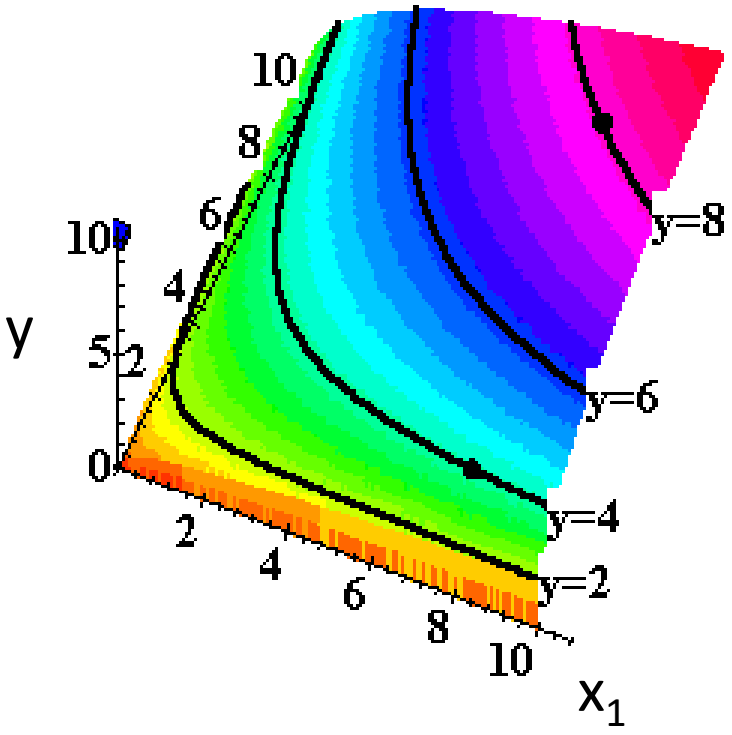
Isoquantas



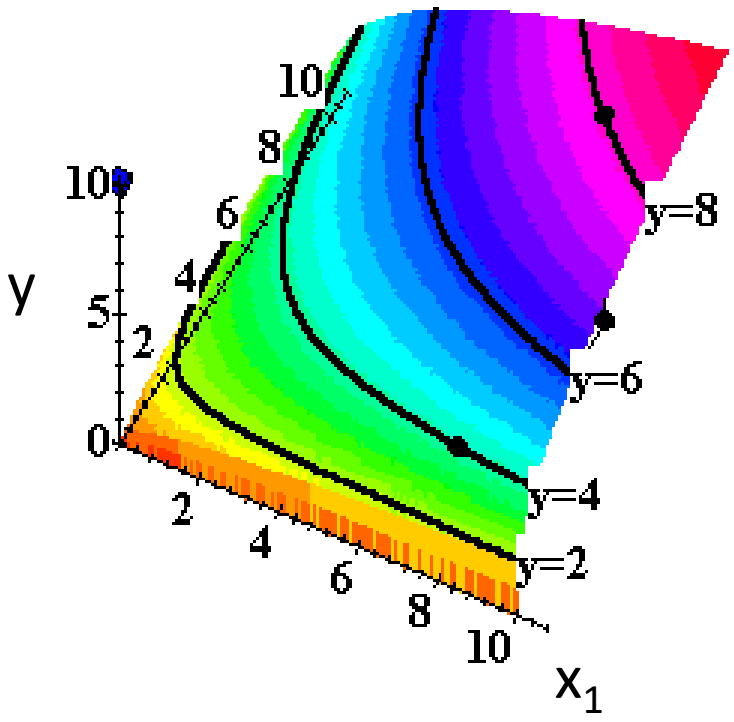
Isoquantas



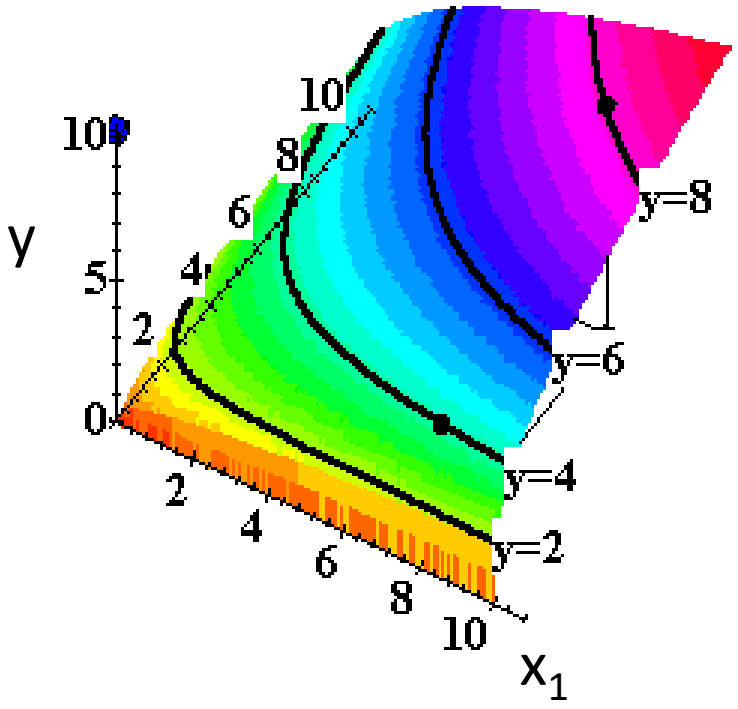
Isoquantas



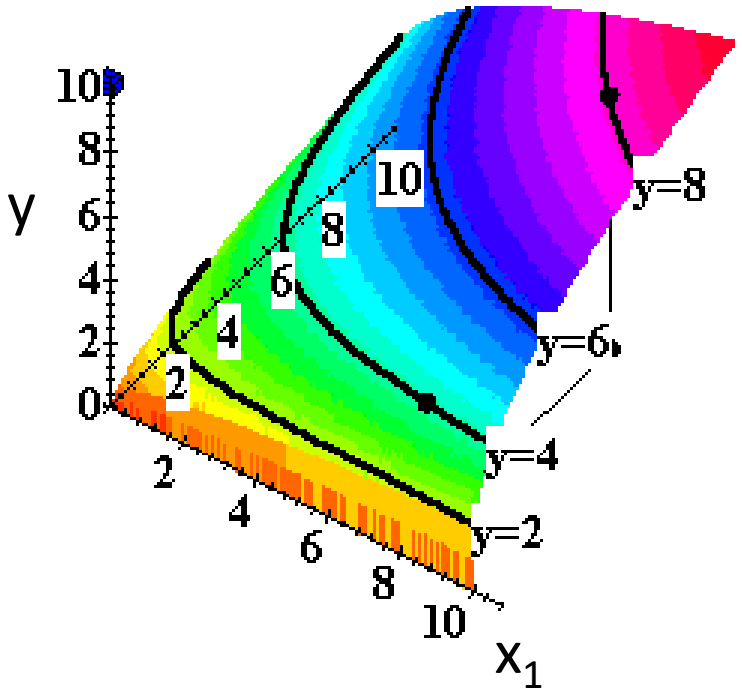
Isoquantas



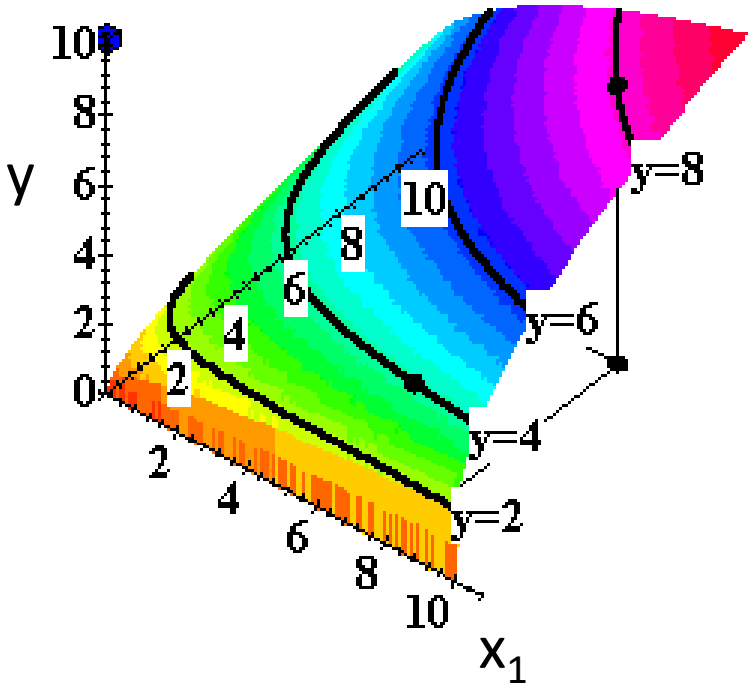
Isoquantas



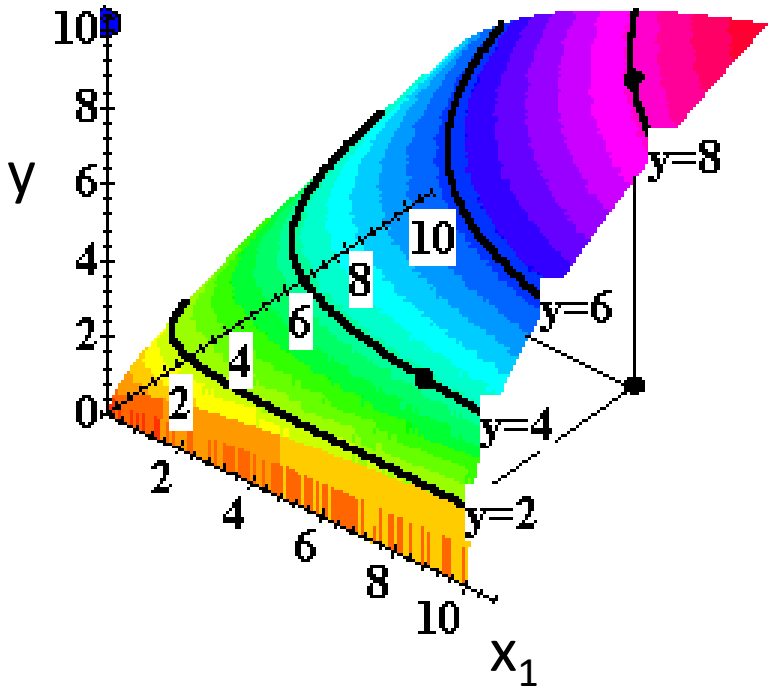
Isoquantas



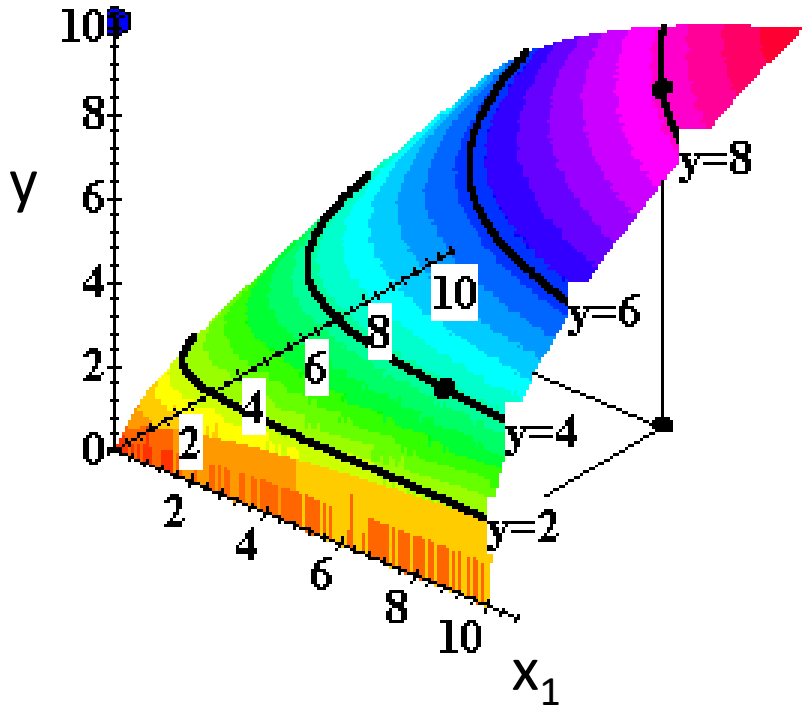
Isoquantas



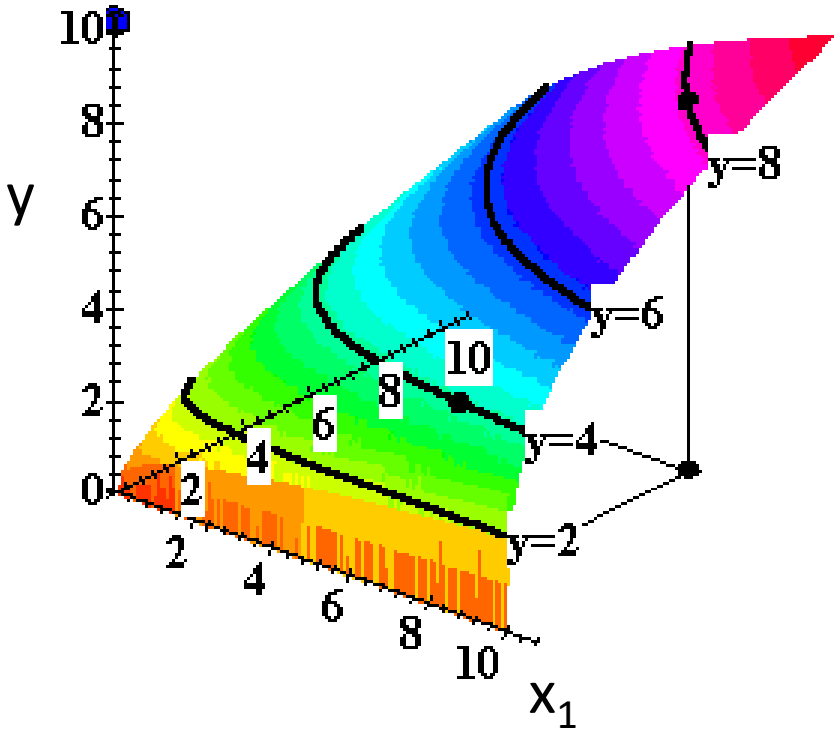
Isoquantas



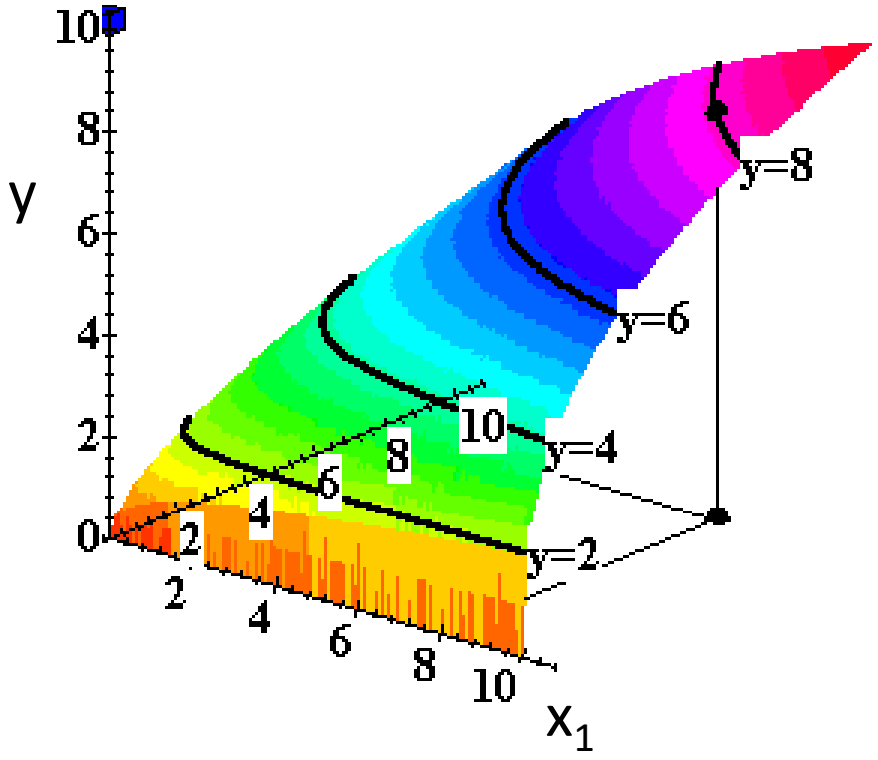
Isoquantas



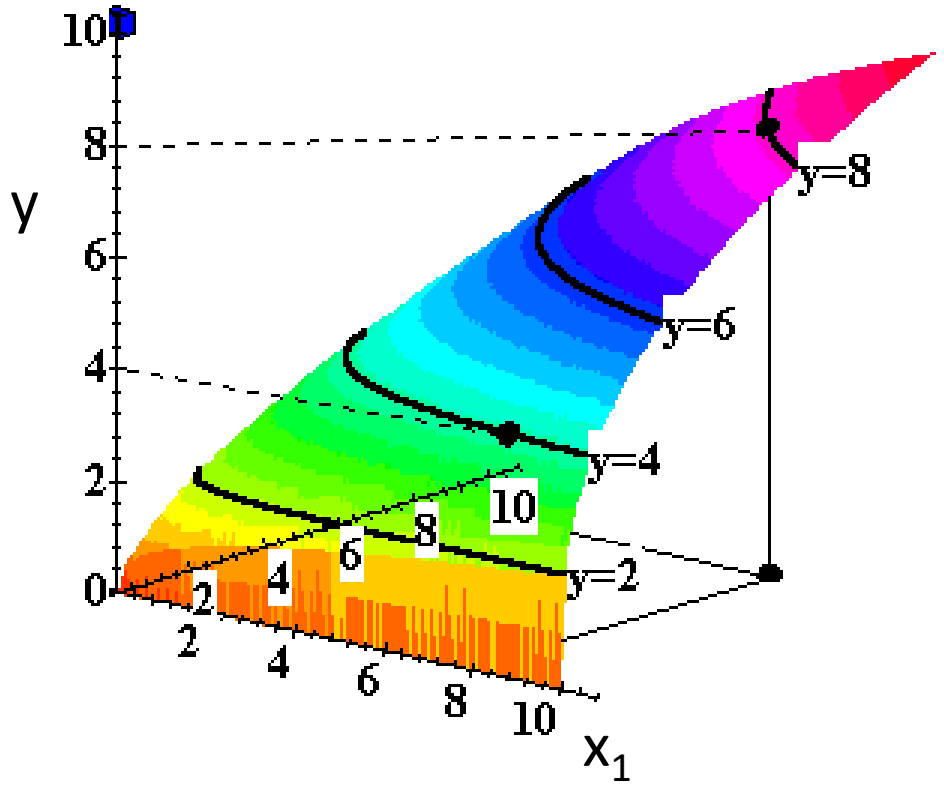
Isoquantas



Isoquantas



Isoquantas



Produtos Marginais

$$y = f(x_1, \cdots, x_n)$$

- O produto marginal do insumo i é a taxa de alteração do nível de produto à medida que o nível de insumo i muda, mantendo todos os outros níveis de insumo fixos.
- Ou seja,

$$MP_i = \frac{\partial y}{\partial x_i}$$

Produtos Marginais

Por exemplo, se

$$y = f(x_1, x_2) = x_1^{1/3} x_2^{2/3}$$

então o produto marginal de 1 é

$$MP_1 = \frac{\partial y}{\partial x_1} = \frac{1}{3} x_1^{-2/3} x_2^{2/3}$$

e o produto marginal de 2 é

$$MP_2 = \frac{\partial y}{\partial x_2} = \frac{2}{3} x_1^{1/3} x_2^{-1/3}.$$

Produtos Marginais

- O produto marginal do insumo i é decrescente se ele se torna menor à medida que o nível de insumo aumenta. Isto é, se
-

$$\frac{\partial MP_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 y}{\partial x_i^2} < 0.$$

Produtos Marginais

Por exemplo, se $y = x_1^{1/3} x_2^{2/3}$ Então

$$MP_1 = \frac{1}{3} x_1^{-2/3} x_2^{2/3} \quad \text{e} \quad MP_2 = \frac{2}{3} x_1^{1/3} x_2^{-1/3}$$

Então

$$\frac{\partial MP_1}{\partial x_1} = -\frac{2}{9} x_1^{-5/3} x_2^{2/3} < 0$$

E

$$\frac{\partial MP_2}{\partial x_2} = -\frac{2}{9} x_1^{1/3} x_2^{-4/3} < 0.$$

Ambos os produtos marginais estão diminuindo.

Inclinação da Isoquanta

- A inclinação de uma isoquanta é denominada **taxa marginal de substituição técnica** (TMST) entre os fatores. Tal medida relaciona quanto de um fator deve ser adquirido para compensar a perda de outro de modo a se localizar na mesma isoquanta:

$$TMST = \frac{dK}{dL}$$

- Tomando o diferencial em uma isoquanta:

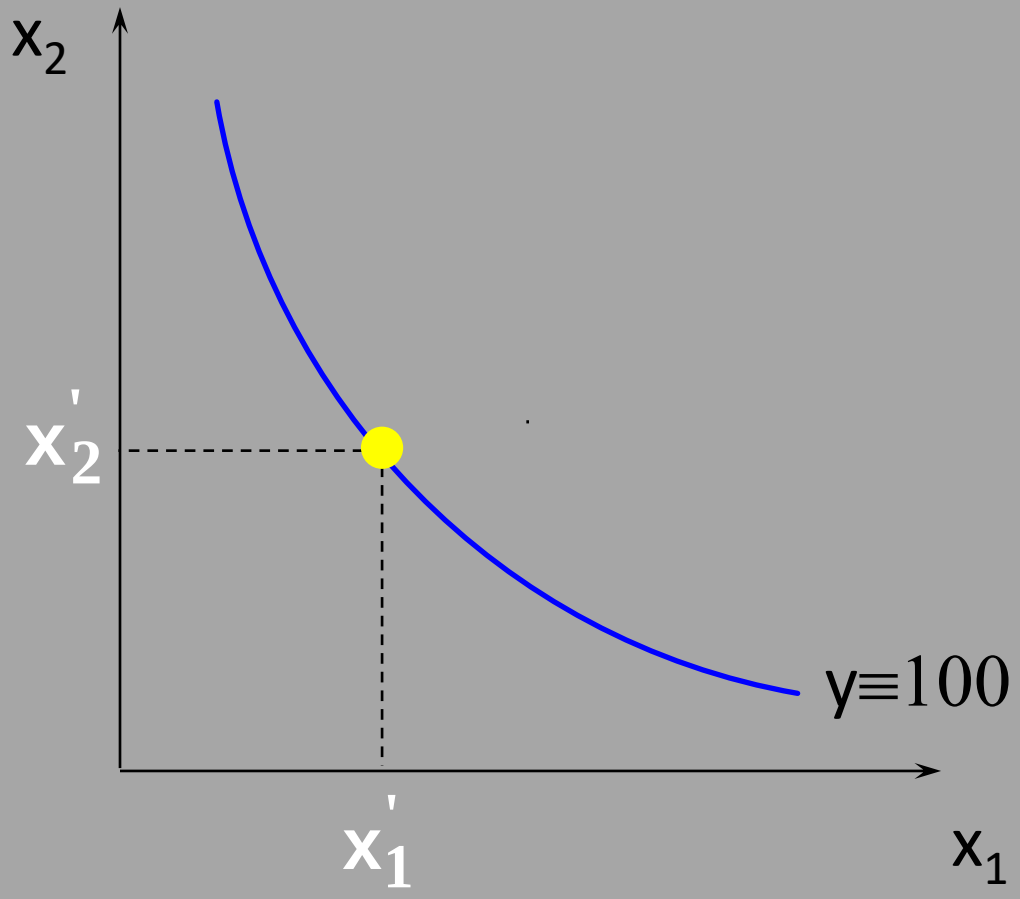
$$dY = 0 = PMg_K . dK + PMg_L .dL = 0$$

- Temos então:

$$\text{TMST} = \frac{dK}{dL} = -\frac{\text{PMg}_\text{L}}{\text{PMg}_\text{K}}$$

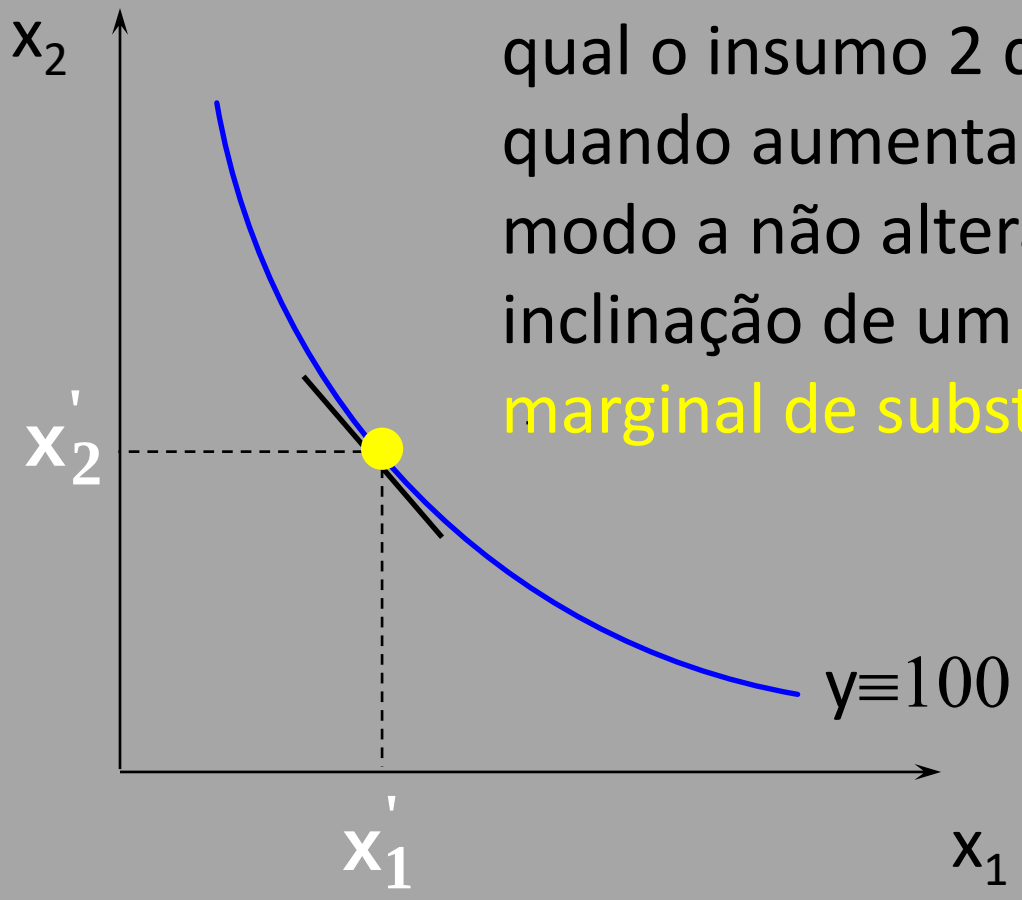
- Se a tecnologia for convexa, a TMST é declinante.

Taxa marginal de substituição técnica TMST

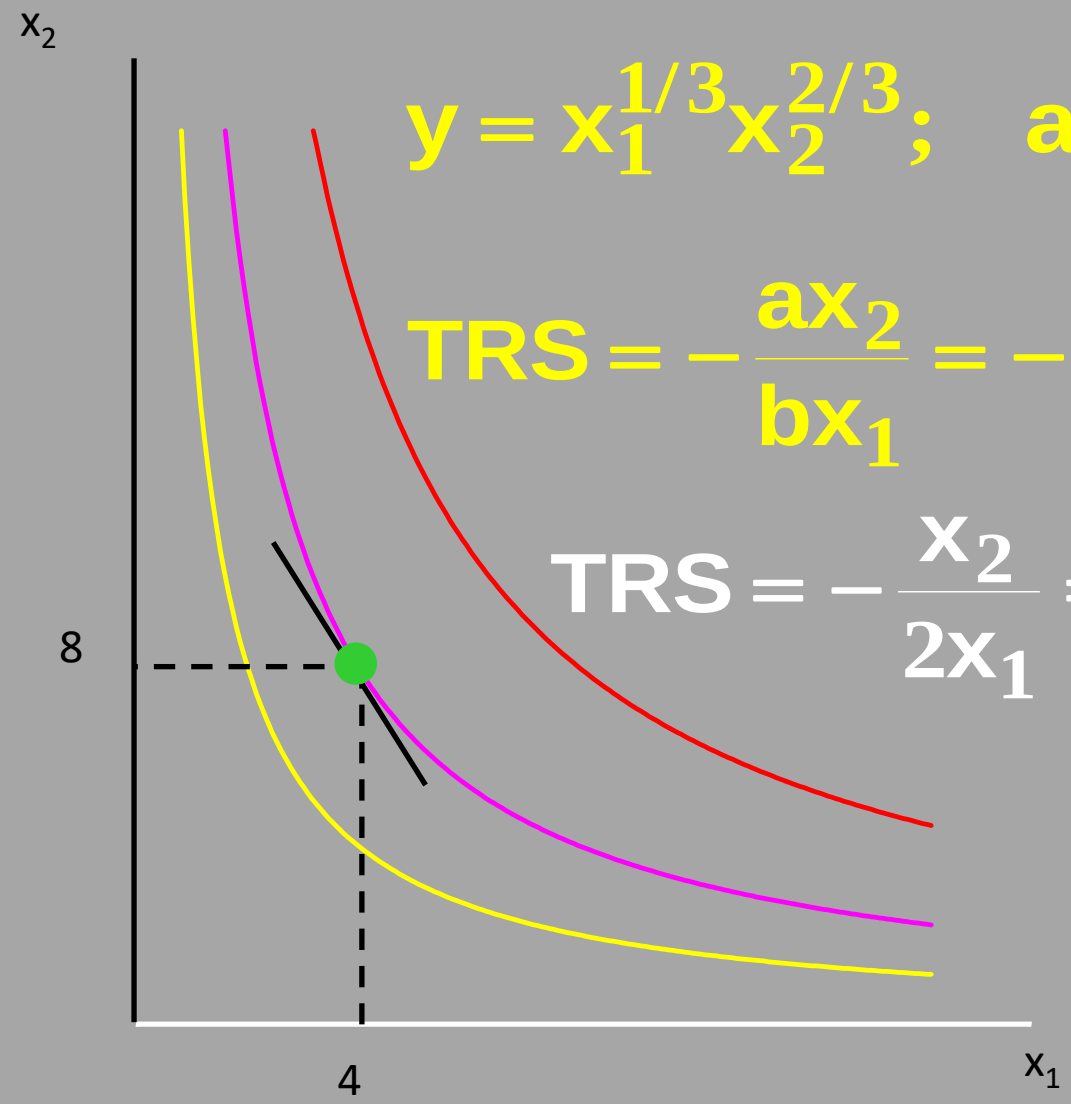


TMST

A inclinação da isoquanta é a taxa a qual o insumo 2 deve ser sacrificado quando aumentamos o insumo 1 de modo a não alterar a produção total. A inclinação de um isoquanta é sua taxa marginal de substituição técnica.



TMST: Exemplo cobb-douglas

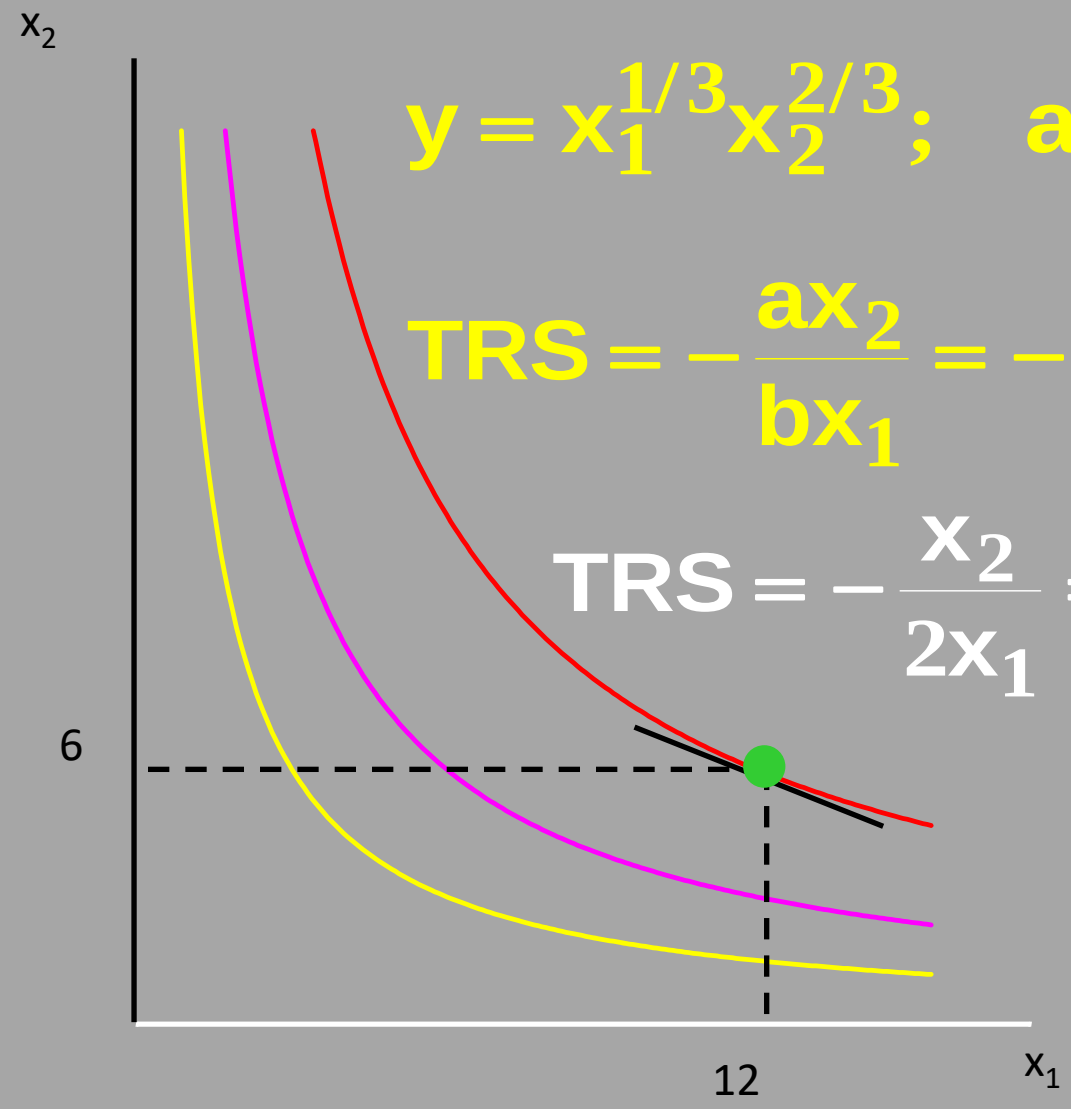


$$y = x_1^{1/3} x_2^{2/3}; \quad a = \frac{1}{3} \text{ and } b = \frac{2}{3}$$

$$TRS = -\frac{ax_2}{bx_1} = -\frac{(1/3)x_2}{(2/3)x_1} = -\frac{x_2}{2x_1}$$

$$TRS = -\frac{x_2}{2x_1} = -\frac{8}{2 \times 4} = -1$$

TMST: Exemplo cobb-douglas



$$y = x_1^{1/3} x_2^{2/3}; \quad a = \frac{1}{3} \text{ and } b = \frac{2}{3}$$

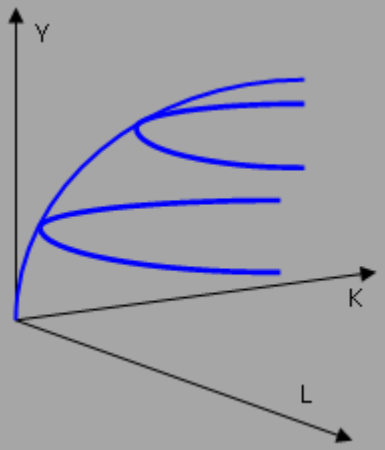
$$TRS = -\frac{ax_2}{bx_1} = -\frac{(1/3)x_2}{(2/3)x_1} = -\frac{x_2}{2x_1}$$

$$TRS = -\frac{x_2}{2x_1} = -\frac{6}{2 \times 12} = -\frac{1}{4}$$

Pressupostos Usuais

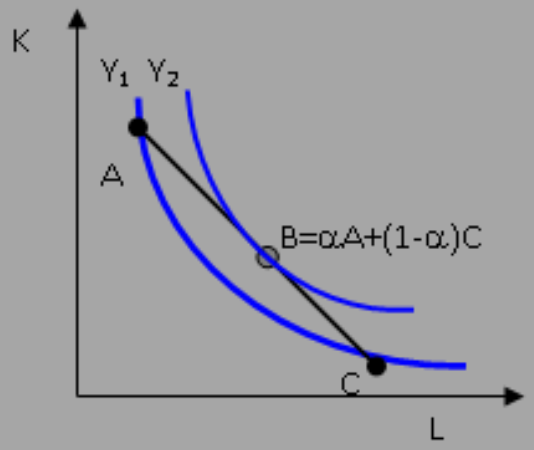
- Monotonicidade (livre descarte):

  $Y(K+\Delta K, L) \geq Y(K,L)$



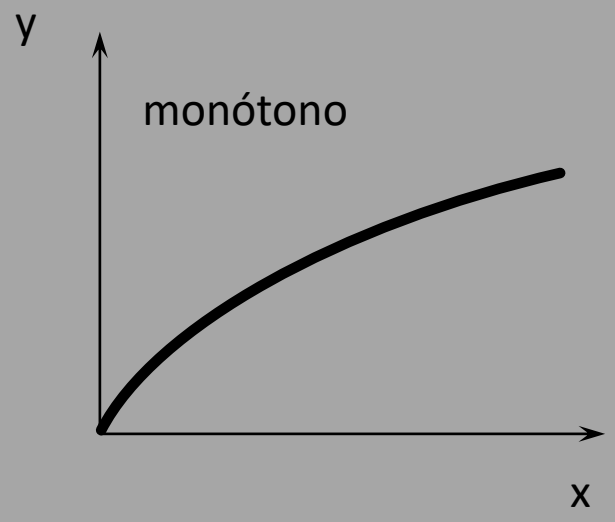
- Convexidade

$Y[\alpha A+(1- \alpha)C] \geq Y[A]$

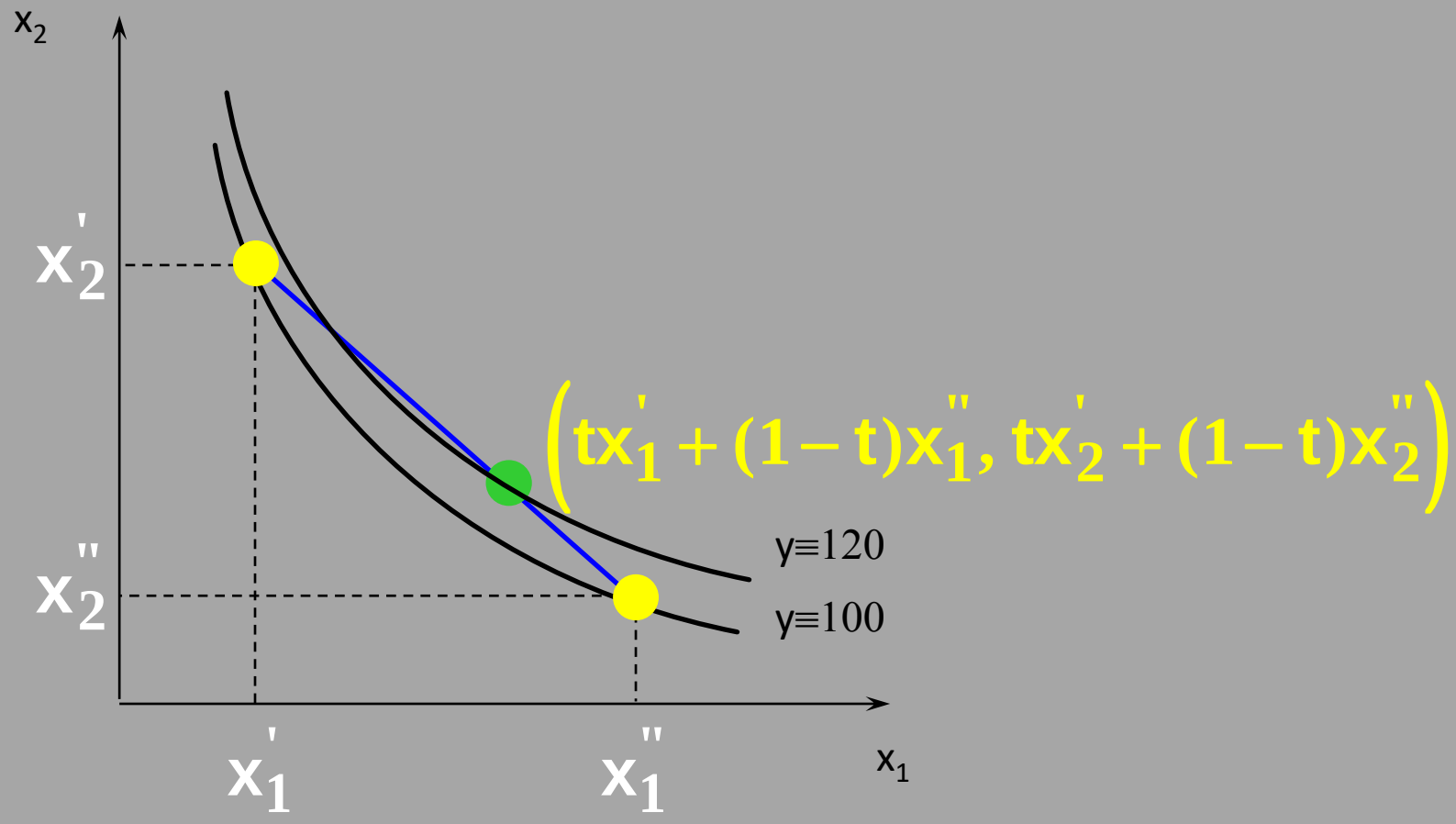


Tecnologias “bem comportadas” - Monotonicidade

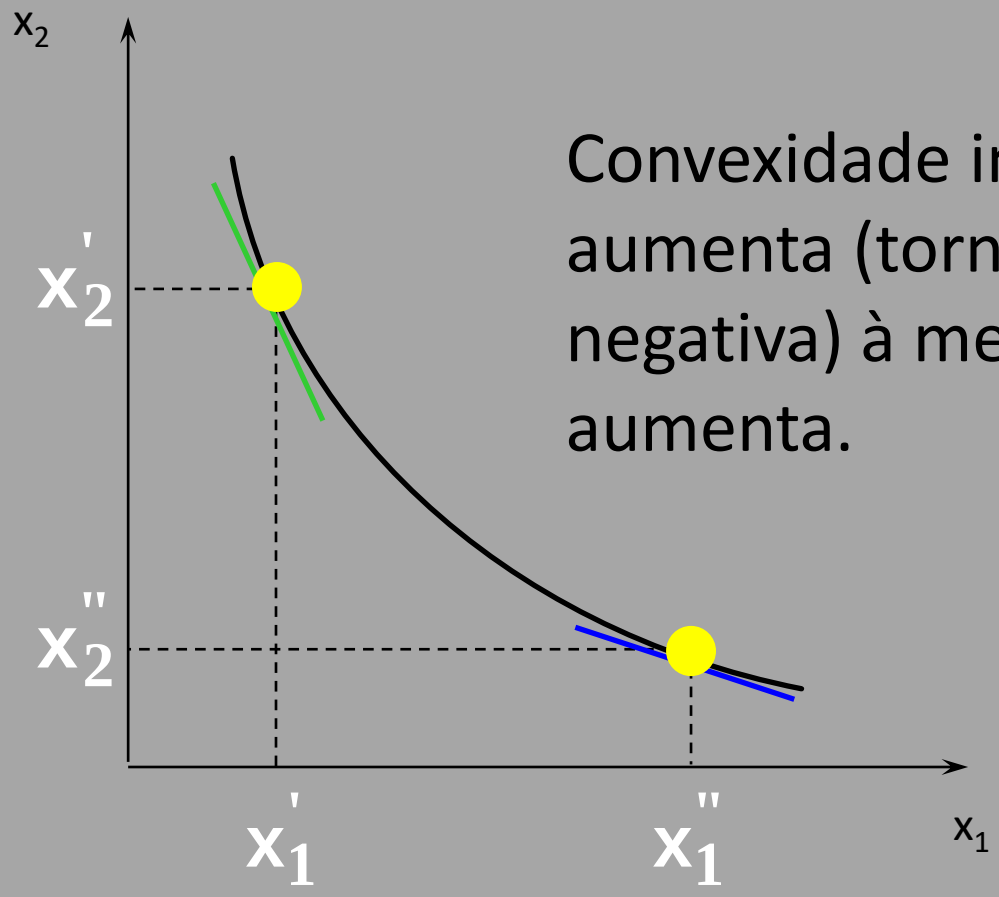
- Monotonicidade: Mais de qualquer insumo gera mais produto.
- Pressuposto pode ser interpretado como livre descarte (free disposal)



Tecnologias “bem comportadas” - Convexidade



Tecnologias bem comportadas - Convexidade



Convexidade implica que a TMST aumenta (torna-se menos negativa) à medida que x_1 aumenta.

Funções de Produção Usuais

Função de produção Cobb-Douglas:

$Y(K,L) = AK^{\alpha}L^{\beta}$

Função de produção substitutos perfeitos:

$Y(K,L) = aK + bL$

Função de produção proporções fixas:

$Y(K,L) = \min\{aK, bL\}$

Função de produção CES (elasticidade de substituição constante):

$$Y(K,L) = (aK^{\rho} + bL^{\rho})^{\frac{1}{\rho}}$$

Cobb-Douglas

- Uma função de produção cobb-douglas tem a forma:

$$y = A x_1^{a_1} x_2^{a_2} \times \cdots \times x_n^{a_n}.$$

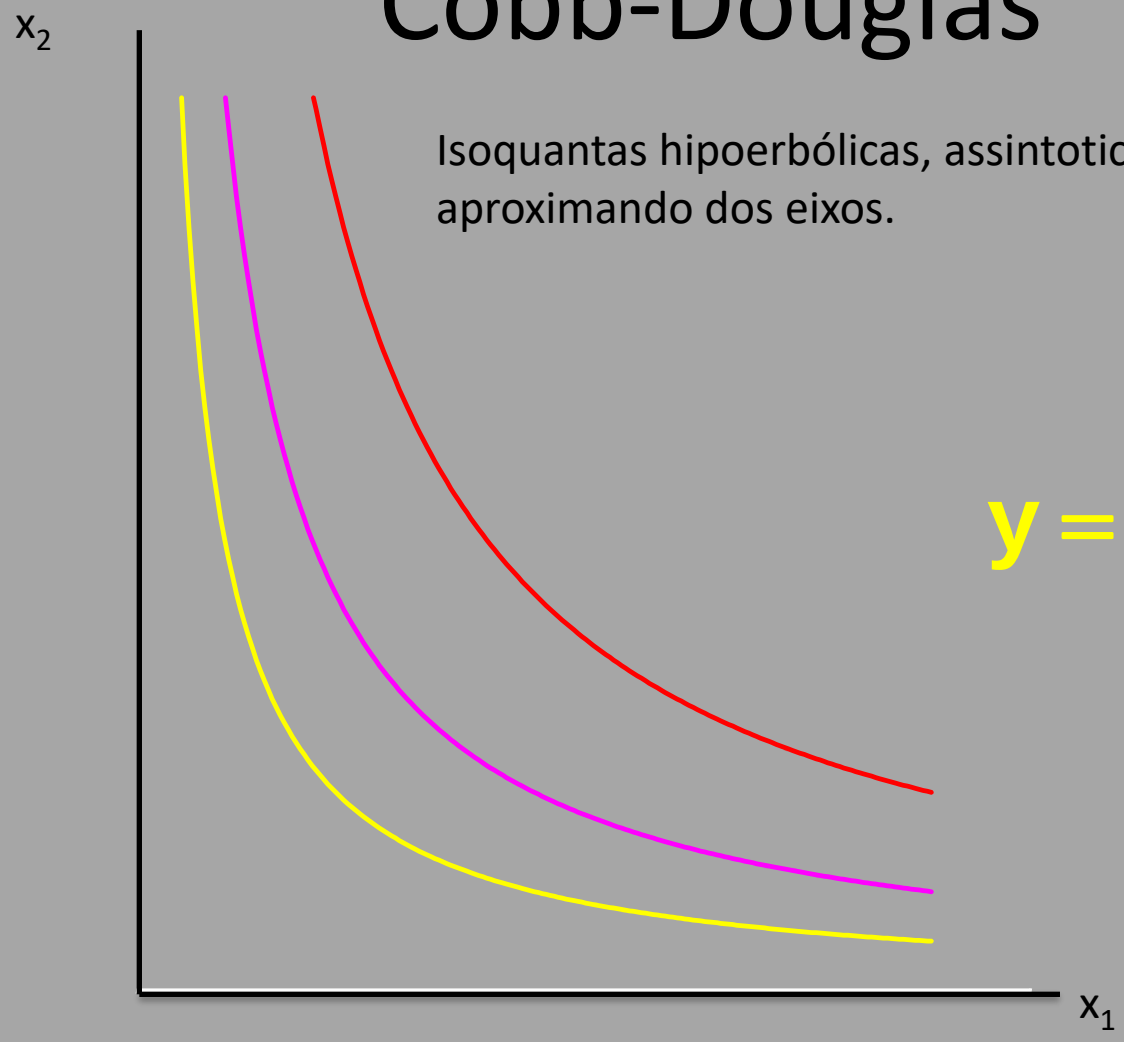
- exemplo

$$y = x_1^{1/3} x_2^{1/3}$$

com

$$n = 2,\ A = 1,\ a_1 = \frac{1}{3} \text{ and } a_2 = \frac{1}{3}.$$

Cobb-Douglas



Isoquantas hipoerbólicas, assintoticamente se aproximando dos eixos.

$$y = x_1^{a_1} x_2^{a_2}$$

Proporções Fixas

- Uma função de produção de proporções fixas é da forma

$$y = \min\{a_1 x_1, a_2 x_2, \cdots, a_n x_n\}.$$

- exemplo

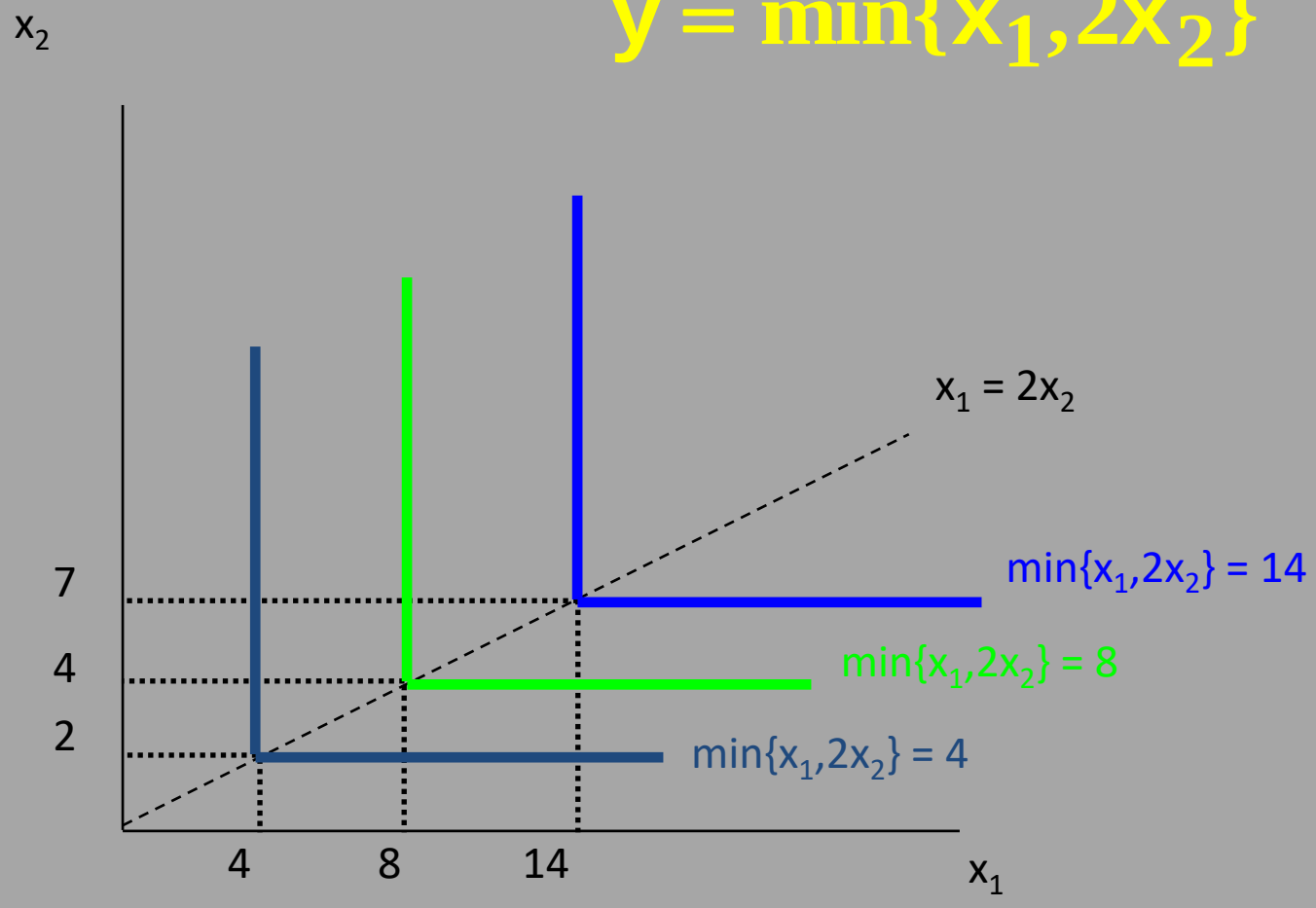
$$y = \min\{x_1, 2x_2\}$$

com

$$n = 2,\ a_1 = 1 \ \text{and} \ a_2 = 2.$$

Tecnologias de Proporções Fixas

$y = \min\{x_1, 2x_2\}$



Tecnologias de substitutos perfeitos

- Uma função de produção de substitutos perfeitos é da forma

$$y = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n.$$

- por exemplo

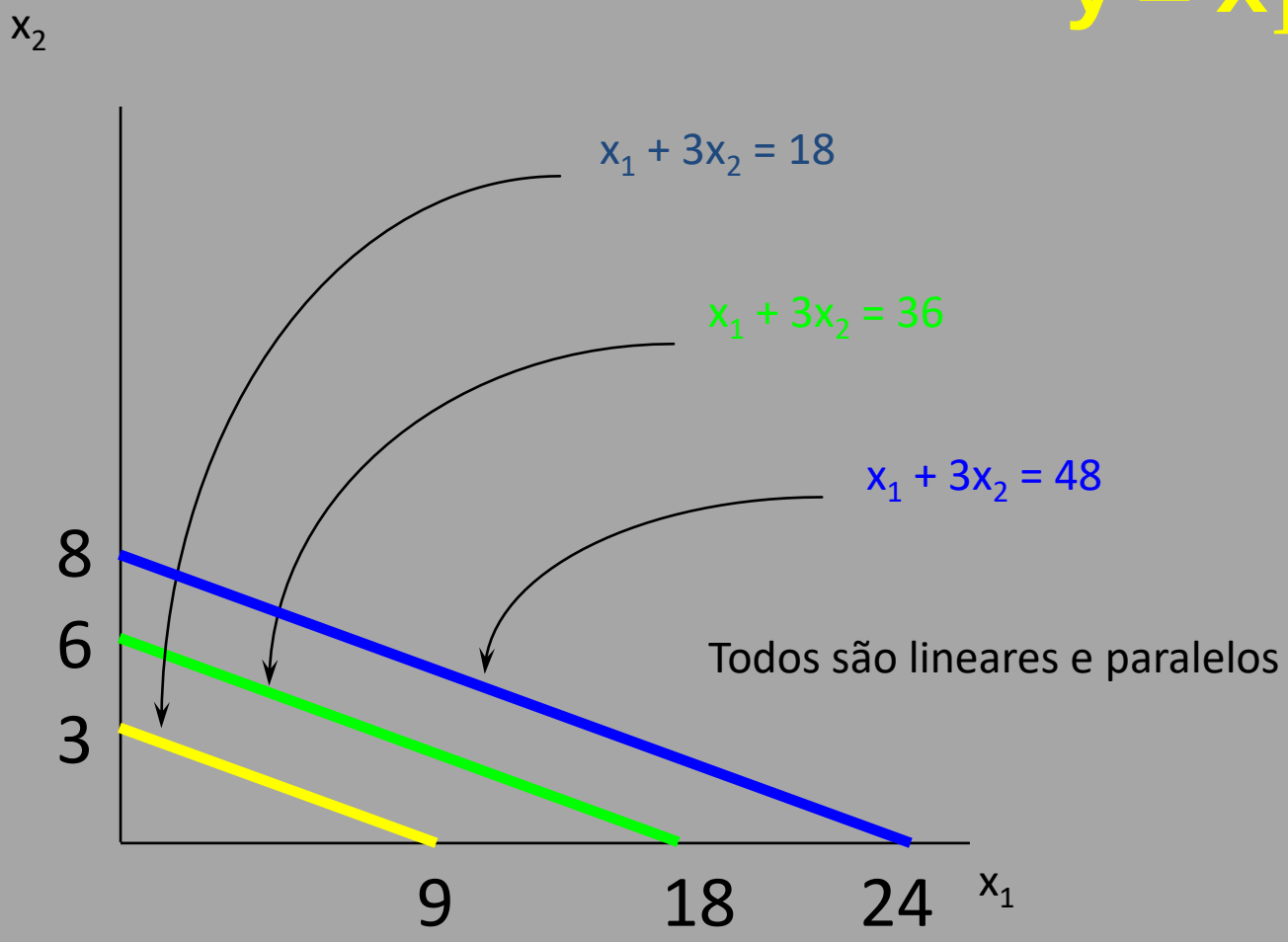
$$y = x_1 + 3x_2$$

com

$$n = 2,\ a_1 = 1 \ \text{ and } \ a_2 = 3.$$

Tecnologias de substitutos perfeitos

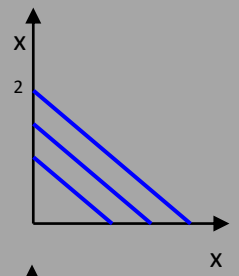
$y = x_1 + 3x_2$



CES

- A função CES tem propriedades importantes:

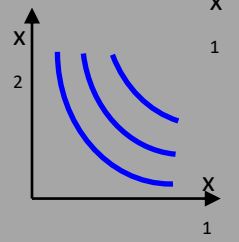
A) generalização de outras funções:



Quando ρ = 1, a função é igual a substitutos perfeitos

$y = K + L$

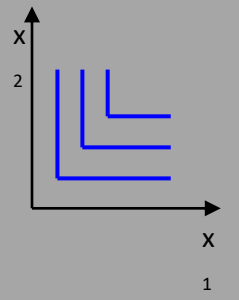
Quando $\rho \to 0$ a função se aproxima de Cobb-Douglas



$$TMST = \frac{dK}{dL} = -\frac{PMg_L}{PMg_K} = \frac{{}^{1}/_{\rho}\rho L^{\rho-1}[K^{\rho}+L^{\rho}]^{\frac{1}{\rho}-1}}{{}^{1}/_{\rho}\rho K^{\rho-1}[K^{\rho}+L^{\rho}]^{\frac{1}{\rho}-1}} = -\left(\frac{L}{K}\right)^{\rho-1} \to \lim_{\rho\to 0}\left(\frac{L}{K}\right)^{\rho-1} = -\left(\frac{K}{L}\right)$$

Quando $\rho \to -\infty$ a função se próxima de complemente perfeitos

$$\lim_{\rho\to-\infty}\left(\frac{L}{K}\right)^{\rho-1} = \left(\frac{K}{L}\right)^{\infty}$$



- Se K>L, então TMST = ∞
- Se K<L, então TMST = 0

CES

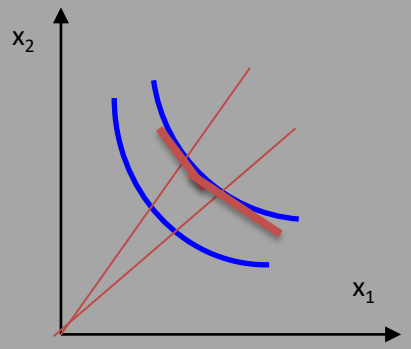
- A função CES tem propriedades importantes:

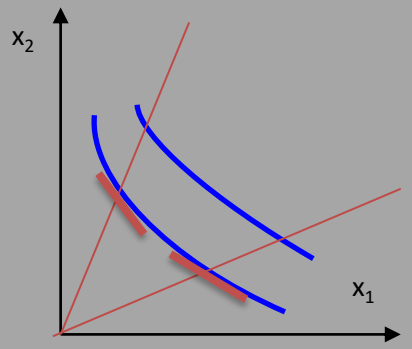
B) elasticidade de substituição constante

A função apresenta **elasticidade de substituição** constante. Esta é dada pela variação percentual na relação capital-trabalho mediante uma variação percentual na TMST:

$$\varepsilon = \frac{\dfrac{d(K/L)}{K/L}}{\dfrac{dTMST}{TMST}} = \frac{TMST}{K/L}\frac{d\left(K/L\right)}{d(TMST)}$$

- Significado do conceito: se uma pequena alteração na inclinação da isoquanta (TMST) leva a grandes mudança na proporção capital-trabalho, a isoquanta é achatada.





CES

Cálculo mais fácil se utilizar logaritmos:

Considere y = f(x). Diferencial total do log:

d lny = 1/y . dy

d ln x = 1/x . dx

$$\varepsilon = \frac{dlny}{dlnx} = \frac{x}{y}\frac{dy}{dx}$$

A elasticidade de substituição será então dada por:

$$\sigma = \frac{dln\left(\frac{K}{L}\right)}{dln(TMST)}$$

No caso da função CES, temos:

$$TMST = -\left(\frac{L}{K}\right)^{\rho-1}$$

Resolvendo para a razão capital-trabalho, temos:

$$\frac{K}{L} = TMST^{\frac{1}{1-\rho}}$$

Aplicando o logaritmo nos dois lados, temos:

$$\ln\frac{K}{L} = lnTMST^{\frac{1}{1-\rho}} \quad \rightarrow \quad \ln\frac{K}{L} = \frac{1}{1-\rho}lnTMST$$

Utilizando a definição da elasticidade de substituição:

$$\sigma = \frac{dln\left(\frac{K}{L}\right)}{dln(TMST)} = \frac{1}{1-\rho}$$

- Exercício: calcule a elasticidade de substituição do caso Cobb-Douglas

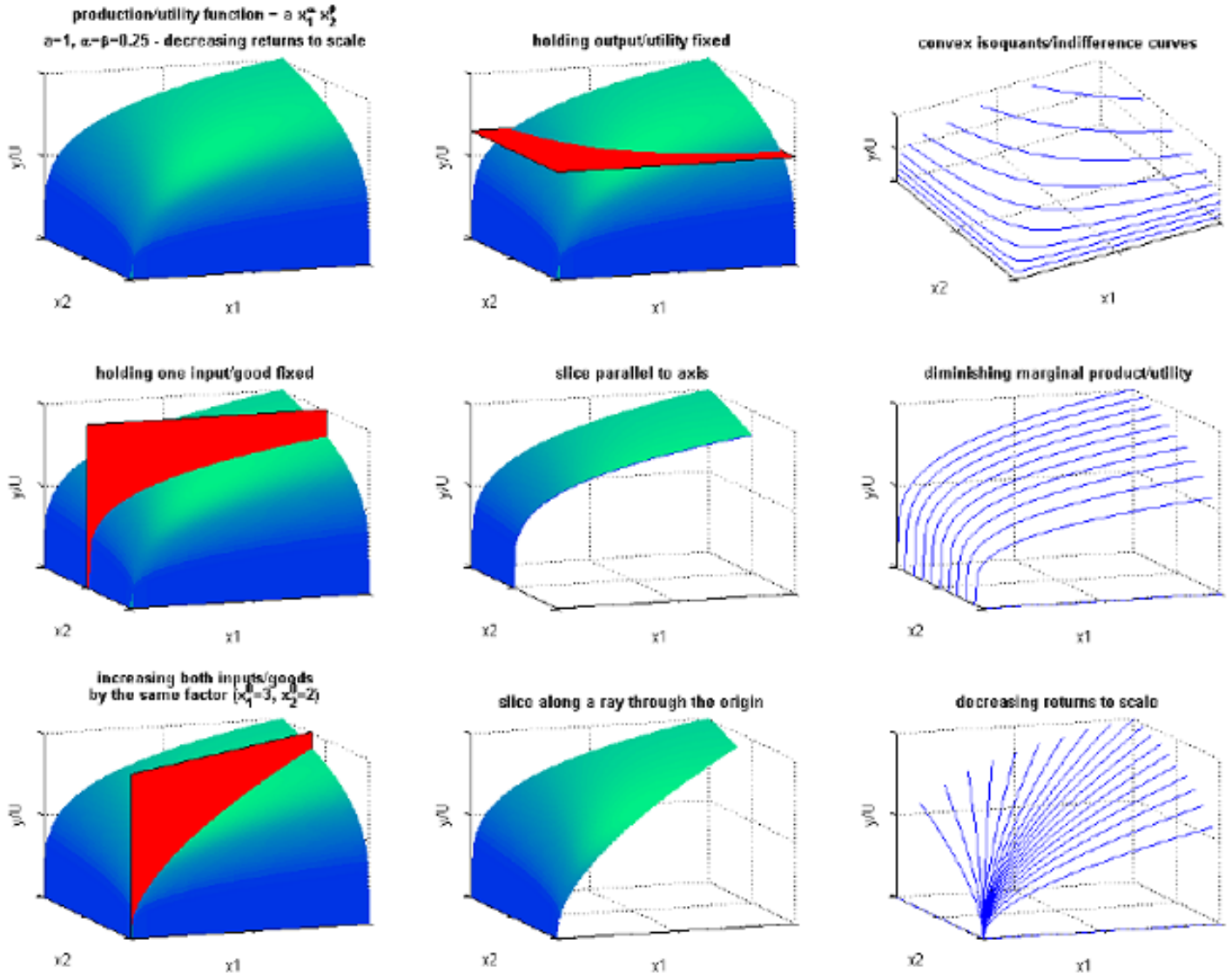
Retorno de Escala

- O **retorno de escala** de uma função de produção mede em que proporção a produção aumenta quando variamos simultaneamente uma certa quantidade de todos os insumos empregados.
- Formalmente, o retorno de escala é dado pelo grau g de homogeneidade da função de produção. Se multiplicarmos todos os fatores produtivos por λ, a produção pode aumentar mais ou menos do que proporcionalmente:

$$f(\lambda K, \lambda L) = \lambda^{g} f(K,L)$$

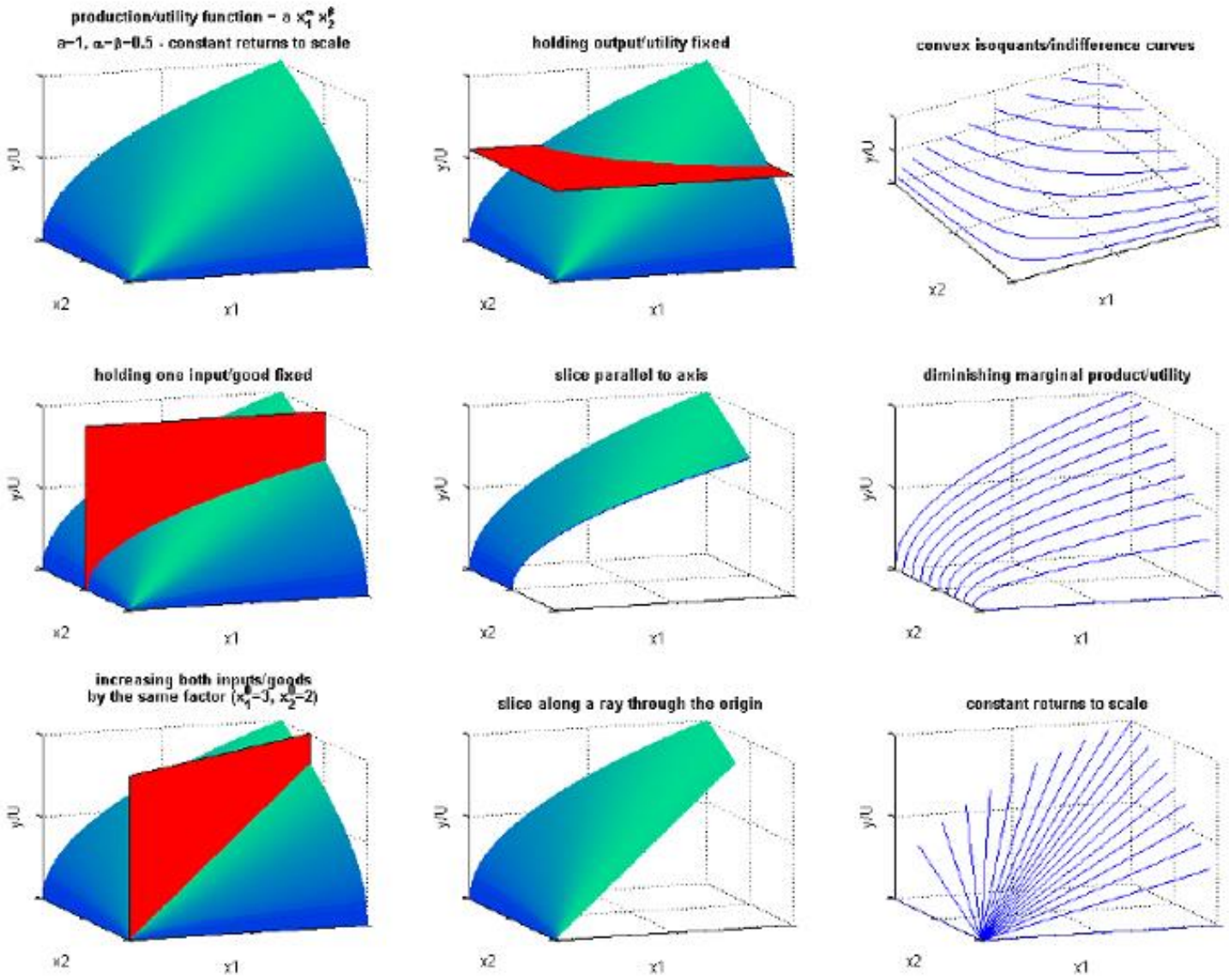
- Tipos de retorno:
  - Se g > 1, então temos retornos crescentes de escala.
  - Se g = 1, então temos retornos constantes de escala.
  - Se g < 1, então temos retornos decrescentes de escala.

Retornos Decrescentes de Escala



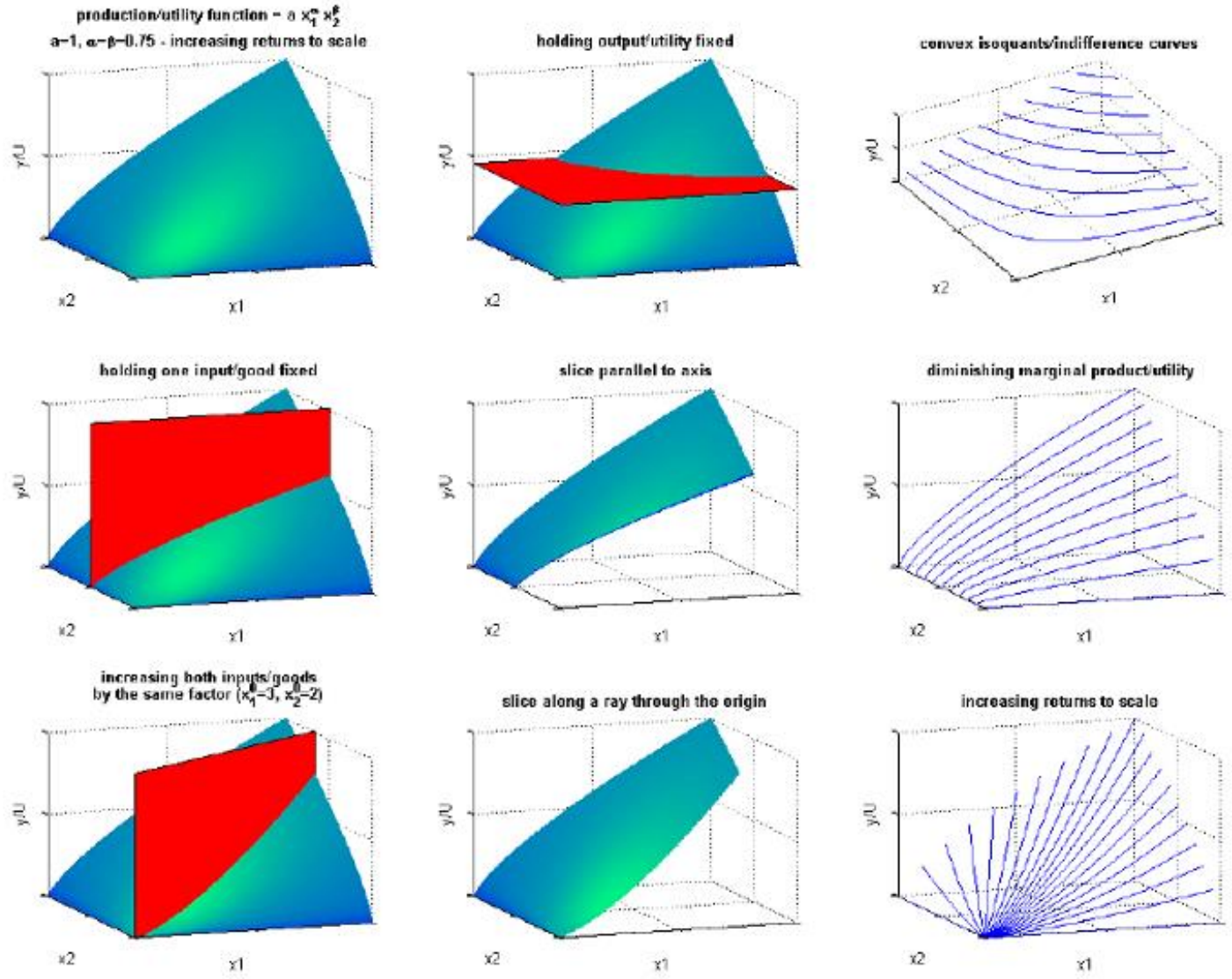
Author: Peter Fuleky, University of Washington

Retornos Constantes de Escala



Author: Peter Fuleky, University of Washington

Retornos Crescentes de Escala



Author: Peter Fuleky, University of Washington

Exercício: verifique o retorno de escala das seguintes funções de produção

- $Y(K,L) = AK^{\alpha}L^{\beta}$

  $Y(\lambda K, \lambda L)=A(\lambda K)^{\alpha}(\lambda L)^{\beta} = \lambda^{\alpha+\beta} AK^{\alpha}L^{\beta} = \lambda^{\alpha+\beta} Y(K, L)$

- $Y(K,L) = aK + bL$

- $Y(K,L) = \min\{aK, bL\}$

- $Y(K,L) = (aK^{\rho} + bL^{\rho})^{\frac{1}{\rho}}$

- $Y(K,L) = \ln K + L$

Exercício

Com relação às funções de produção podemos afirmar que:

1) A função de produção $F(K,L) = (K.L)^{1/2}$ apresenta rendimentos decrescentes de escala.
2) A elasticidade de substituição da função de produção $F(K,L)=(a_1K^b + a_2 L^b)^{1/b}$ é variável.
3) As isoquantas da função de produção $F(K,L) = K^{0.5} L^{0.5}$ são linhas retas
4) Rendimentos decrescentes para um único fator de produção e rendimentos constantes de escala não são inconsistentes.
5) A função de produção $F(K,L) = 3K + 4L$ apresenta rendimentos constantes de escala.
6) Existe uma relação direta entre rendimentos crescentes de escala e as economias de escopo.

Exercício

(2008-5)

Considere a tecnologia representada pela função de produção $f(K, L) = (\frac{1}{2}K^{-\rho} + \frac{1}{2}L^{-\rho})^{-1/\rho}$, em que $\rho \geq -1$ e $K, L > 0$. Julgue as afirmações:

(0) Essa tecnologia é também representada pela função $F(K, L) = \log [f(k,l)] + 35$.
(1) Essa tecnologia possui retornos constantes de escala.
(2) ρ denota a elasticidade de substituição.
(3) Se ρ tende para infinito, então f (K, L) tende para uma função de produção Cobb-Douglas.
(4) Se ρ tende para zero, então f (K, L) tende para uma função de produção Leontief, ou de proporções fixas.

V (1) Devemos multiplicar todos os insumos por um valor constante λ e constatar se a produção total se alterou na mesma proporção:

$$f(\lambda K, \lambda L) = \left[\frac{1}{2}(\lambda K)^{-\rho} + \frac{1}{2}(\lambda L)^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}} = \left[\lambda^{-\rho}\left(\frac{1}{2}K^{-\rho} + \frac{1}{2}L^{-\rho}\right)\right]^{-\frac{1}{\rho}} =$$

$$\lambda\left[\frac{1}{2}(K)^{-\rho} + \frac{1}{2}(L)^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}} = \lambda f(K, L)$$

Temos, portanto, retorno constante de escala.

Exercício Anpec - continuação

F(2) O exercício trata da função de produção do tipo CES – elasticidade de substituição (σ) constante. Esta elasticidade é definida como a mudança percentual da razão de emprego entre os fatores conforme tenhamos variações percentuais na taxa marginal de substituição técnica (TMST):

$$\sigma = \frac{d\left(x_2/x_1\right)}{d|TMST|}\frac{|TMST|}{\left(x_2/x_1\right)} = \frac{d\ln\left(x_2/x_1\right)}{d\ln|TMST|}$$

No caso da função CES, vamos calcular antes a TMST para poder calcular a elasticidade de substituição:

$$TMST = \frac{-\frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{2}K^{-\rho}+\frac{1}{2}L^{-\rho}\right)^{-\frac{1}{\rho}}(-\rho)\frac{1}{2}K^{-\rho-1}}{-\frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{2}K^{-\rho}+\frac{1}{2}L^{-\rho}\right)^{-\frac{1}{\rho}}(-\rho)\frac{1}{2}L^{-\rho-1}} = \left(\frac{K}{L}\right)^{-\rho-1}$$

Resolvendo para a razão capital-trabalho, temos:

$\frac{K}{L} = |TMST|^{\frac{1}{1-\rho}}$ Tomando o logaritmo neperiano dessa expressão, temos:

$\ln\frac{K}{L} = \frac{1}{1-\rho}\ln|TMST|$ Aplicando a expressão da elasticidade em termos de logaritmos, temos:

$\sigma = \frac{d\ln\left(x_2/x_1\right)}{d\ln|TMST|} = \frac{1}{1-\rho}$. A elasticidade de substituição é dada portanto por σ, não por ρ.

Exercício - continuação

(2008-5)

Considere a tecnologia representada pela função de produção $f(K, L) = (\frac{1}{2} K^{-\rho} + \frac{1}{2} L^{-\rho})^{-1/\rho}$, em que $\rho \geq -1$ e $K, L > 0$. Julgue as afirmações:

(0) Essa tecnologia é também representada pela função $F(K, L) = \log [f(k,l)] + 35$.
(1) Essa tecnologia possui retornos constantes de escala.
(2) ρ denota a elasticidade de substituição.
(3) Se ρ tende para infinito, então f (K, L) tende para uma função de produção Cobb-Douglas.
(4) Se ρ tende para zero, então f (K, L) tende para uma função de produção Leontief, ou de proporções fixas.

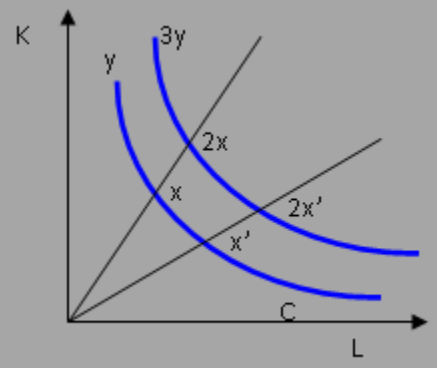
- F (3) Tomando a expressão da TMST, podemos ver que se ρ tender ao infinito, então $(K/L)^{-\rho-1}$ tende a zero ou infinito, conforme L seja maior ou menor do que K. Isso descreve a inclinação das isoquantas de uma função de produção de complementos perfeitos.
- F (4) Tomando a mesma expressão, a inclinação da isoquanta será L/K, representante de uma função Cobb-Douglas.

Função Homotética

- **Função homotética**: transformação monotônica de função homogênea de grau 1:
  - Função homogênea de grau um:

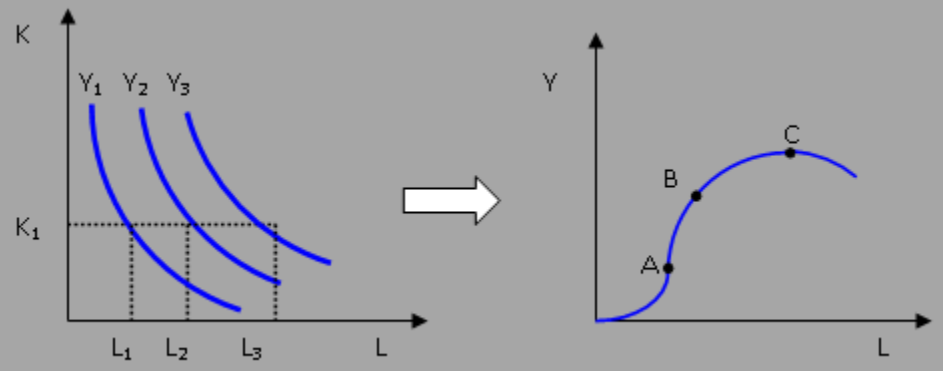
    $f(\lambda K, \lambda L) = \lambda f(K,L)$
  - Exemplo de transformação:

    $g[f(x)] = 3.f(x)^2$
  - Exemplo gráfico: na figura, dobramos insumos e a produção triplicou. Repare, no entanto, que as curvas de isoquantas são simétricas



Horizontes de Planejamento

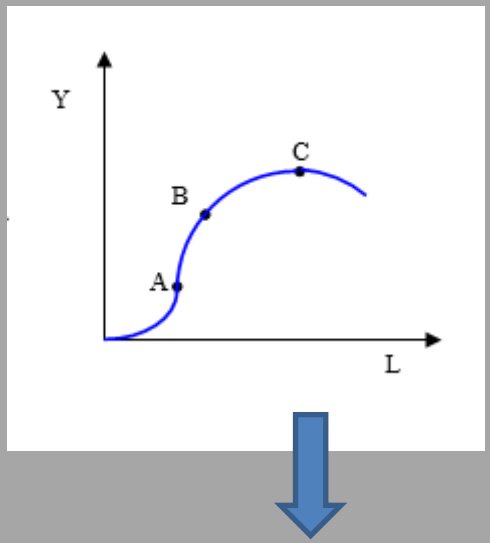
- A microeconomia distingue entre **longo e curto prazos**
  - Prazos não são medidos em unidades de tempo:
    - Quando pelo menos um fator não puder ser alterado (ou for extremamente custoso fazê-lo), estamos no curto prazo.
    - Quando o emprego de todos os fatores puderem variar conforme os seus preços relativos se alterem, estaremos no longo prazo.
- Vamos adotar a convenção que no curto prazo o fator capital é fixo: $Y = f(\overline{K}, L)$
- Fixando K, podemos construir a função de produção no curto prazo:



Produto Médio e Marginal

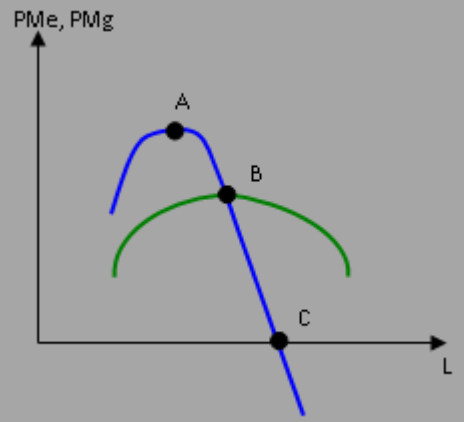
- Chamamos **produto marginal do trabalho** (PMg_L) o acréscimo da produção quando aumentamos L e fixamos K:

$$PMg_L = \frac{\partial Y}{\partial L}$$



- Chamamos **produto médio do trabalho** (PMe_L) a razão entre a produção e a quantidade do insumo empregada:

$$PMe_L = Y/L$$

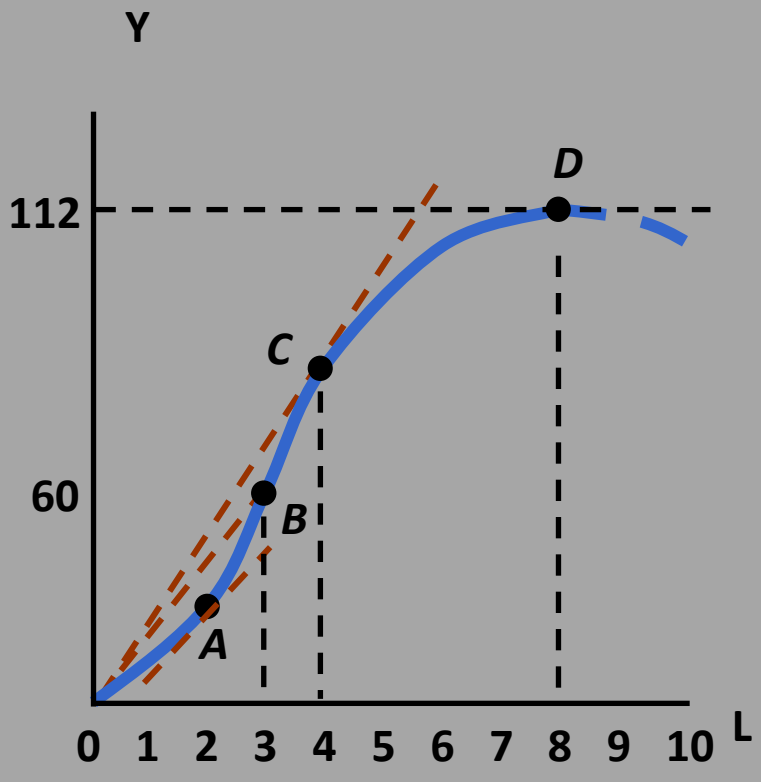


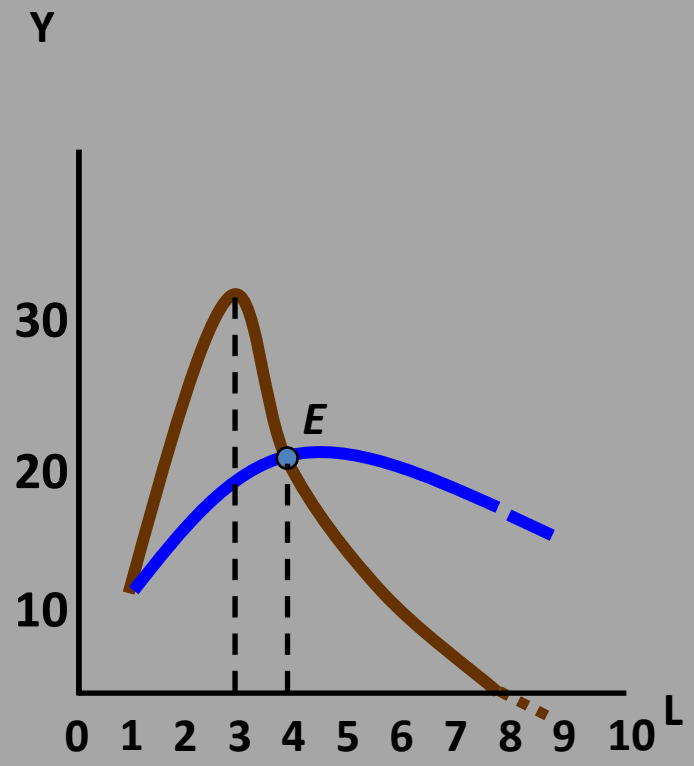
“Lei” dos Rendimentos Decrescentes dos Fatores

- Sinônimo de Produto Marginal Decrescente
- À medida que o uso de determinado insumo aumenta, as quantidades adicionais de produto obtidas diminuem
- Experimento mental: se não fosse assim, seria possível cultivar todos os alimentos para a humanidade em um vaso de flores

PMe e PMg

- Quando *PMg* = 0, *Y* encontra-se no seu nível máximo
- Quando *PMg* > *PMe, PMe é* crescente
- Quando *PMg* < *PMe, PMe* é decrescente
- Quando *PMg* = *PMe, PMe* encontra-se no seu nível máximo





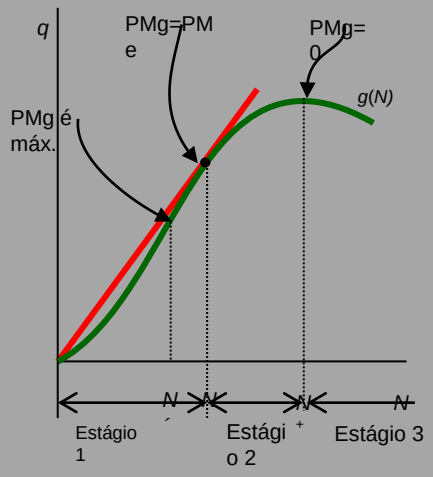
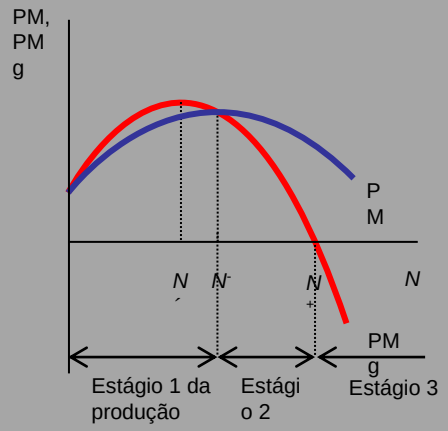
Exercício

Com respeito à teoria da produção, avalie as afirmativas:

(0) Uma função de produção caracterizada por rendimentos marginais decrescentes dos fatores capital e trabalho não pode apresentar retornos crescentes de escala.

(1) Uma função de produção de proporções fixas apresenta retornos constantes de escala.

(2) Da mesma forma que para as funções de utilidade, operar transformações monotônicas crescentes nas funções de produção não altera os resultados da análise.

(3) A convexidade das isoquantas implica que a taxa marginal de substituição técnica entre os bens seja decrescente.

(4) Considere que para um baixo nível de utilização de um fator variável, seu produto marginal seja positivo e crescente. Se a partir de um certo ponto este fator apresentar produto marginal positivo e decrescente, então, a partir deste mesmo ponto, o produto médio do fator também será decrescente